

Capitolul 1

Ecuatii diferențiale rezolvabile prin cuadraturi

1.1 Ecuatii diferențiale de ordin întâi cu variabile separabile

Foma generală a unei ecuații diferențiale de ordin întâi cu variabile separabile este

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \quad (1.1)$$

unde $I, J \subset \mathbb{R}$; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții continue cu $g(y) \neq 0, \forall y \in J$.

Rezolvarea ecuației diferențiale de ordin întâi cu variabile separabile: Fie $x = x(t)$ o soluție a ecuației (1.1). Observăm că ecuația (1.1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \forall t \in I.$$

Integrând această egalitate membru cu membru rezultă

$$\int \frac{x'(t)}{g(x(t))} dt = \int f(t) dt, \forall t \in I.$$

Obținem $G(x(t)) = \int f(t) dt + C$, unde G este definită prin relația $G(u) = \int \frac{du}{g(u)}$.

Observăm că g nu se anulează pe J și este continuă, deci păstrează semn constant pe J . Putem presupune că $g(y) > 0, \forall y \in J$, schimbând eventual semnul funcției f . Atunci G este strict crescătoare pe J , deci inversabilă. Rezultă

$$x(t, C) = G^{-1} \left(\int f(t) dt + C \right) \quad (1.2)$$

Exercițiul 1.1 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x' \cos t \ln x - x = 0, t \in (0, \frac{\pi}{2}), x > 0.$$

Rezolvare. Scriem ecuația sub forma $x' = \frac{x}{\cos t \ln x} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\cos t}, g(x) = \frac{x}{\ln x}$. Pe $(0, \frac{\pi}{2})$, f este continuă iar pentru $x > 1$, g este continuă și strict pozitivă, iar pentru $x \in (0, 1)$, g este continuă și strict negativă. Obținem

$$\frac{\ln x}{x} x' = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \int \frac{\ln x(s)}{x(s)} x'(s) ds = \int \frac{1}{\cos t} dt \Rightarrow \frac{1}{2} \ln^2 |x| = \ln \operatorname{tg} \frac{2t + \pi}{4} + C \Rightarrow x(t, C) = e^{\sqrt{2 \ln \operatorname{tg} \frac{2t + \pi}{4} + C}}, C \in \mathbb{R}. \blacktriangle$$

Exercițiul 1.2 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x' = tx^2 + 2tx.$$

Rezolvare. $f(t) = t, g(x) = x^2 + 2x$. Observăm că $x(t) = 0$ și $x(t) = 2$ sunt soluții ale ecuației. Pe orice interval $\mathbb{I} = \mathbb{R}, \mathbb{J} \subset (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ sau $\mathbb{J} \subset (0, 2)$ avem

$$\frac{1}{x^2 + 2x} x' = t dt \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) x' = t dt \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| = 2t^2 + \ln C \Rightarrow$$

$$\left| \frac{x}{x+2} \right| = C e^{2t^2} \Rightarrow x(t, C) = 2C \frac{e^{2t^2}}{1 - C e^{2t^2}}, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \text{ și } x(t, C) = 2C \frac{e^{2t^2}}{-1 - C e^{2t^2}}, x \in (0, 2). \blacktriangle$$

1.2 Ecuații diferențiale de ordin întâi reducibile la ecuații cu variabile separabile

Definiția 1.1 Funcția $f = f(x, y)$ se numește **omogenă de grad $\alpha \in \mathbb{R}$** dacă

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y). \quad (1.3)$$

Forma generală a unei **ecuații diferențiale de ordin întâi omogenă** este

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.4)$$

unde f este o funcție continuă și omogenă de grad zero.

Rezolvarea ecuației diferențiale de ordin întâi omogenă se face făcând schimbarea de funcție

$$x(t) = tu(t) \quad (1.5)$$

și se ajunge la o ecuație cu variabile separabile.

Exercițiul 1.3 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg} \frac{x(t)}{t}, t \neq 0, x(t) \neq k \frac{\pi}{2} t, k \in \mathbb{N}.$$

Rezolvare. Observăm că $g\left(\frac{x(t)}{t}\right) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg} \frac{x(t)}{t}$. Facem substituția $x(t) = tu(t)$ și obținem $u(t) + tu'(t) = u(t) + \operatorname{tg} u(t) \Leftrightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \operatorname{tg} u(t) \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{\operatorname{tg} u(t)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \int \frac{u'(t)}{\operatorname{tg} u(t)} dt =$

1.2. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN ÎNTÂI REDUCTIBILE LA ECUAȚII CU VARIABILE SEPARABILE

$$\int \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \ln |\sin u(t)| = \ln t + \ln C \Leftrightarrow \sin u(t) = Ct \Leftrightarrow \sin \frac{x(t)}{t} = Ct \Leftrightarrow \frac{x(t)}{t} = \arcsin Ct, t \in \left[-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right] \Rightarrow x(t, C) = t \arcsin Ct, t \in \left[-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right]. \blacktriangle$$

Ecuția diferențială de ordin întâi de forma

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1x(t) + b_1t + c_1}{a_2x(t) + b_2t + c_2}\right) \quad (1.6)$$

unde $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$, **poate fi redusă la o ecuație cu variabile separabile.**

Rezolvarea ecuației (1.6) se face în funcție de compatibilitatea sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1t + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2t + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Distingem trei cazuri:

CAZUL I. Dacă sistemul (1.7) este compatibil determinat, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, cu soluția (t_0, x_0) atunci prin schimbarea de variabilă și de funcție $\begin{cases} x = y + x_0 \\ t = s + t_0 \end{cases}$, ecuația (1.6) poate fi adusă la forma ecuației omogene

$$y'(s) = f\left(\frac{a_1 \frac{y(s)}{s} + b_1}{a_2 \frac{y(s)}{s} + b_2}\right).$$

CAZUL II. Dacă sistemul (1.7) este compatibil nedeterminat $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ și $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$, atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$ și ecuația (1.6) se reduce la $x'(t) = f(\lambda)$.

CAZUL III. Dacă sistemul (1.7) este un sistem incompatibil $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ și $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$ atunci $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$ și prin schimbarea de funcție $y(t) = a_1x(t) + b_1t$ se obține ecuația cu variabile separabile

$$\frac{y'(t) - b_1}{a_1} = f\left(\frac{y(t) + c_1}{\lambda y(t) + c_2}\right). \blacklozenge$$

Exercițiul 1.4 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'(t) = 2\left(\frac{x(t) + 1}{t + x(t) - 2}\right)^2, t + x - 2 \neq 0.$$

4 CAPITOLUL 1. ECUAȚII DIFERENȚIALE REZOLVABILE PRIN CUADRATURI

Rezolvare. Observăm că $x(t) = -1$ este soluție a ecuației diferențiale date. Considerăm sistemul algebric

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ t + x - 2 = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ sistemul algebric (1.8) are soluție unică, $t_0 = 3, x_0 = -1$.

Făcând schimbarea de variabile și de funcție $\begin{cases} t = s + 3 \\ x = y - 1 \end{cases}$ se obține ecuația diferențială

$$y'(s) = 2 \left(\frac{y(s)}{s + y(s)} \right)^2. \text{ Ecuația se mai poate scrie sub forma } y'(s) = 2 \left(\frac{\frac{y(s)}{s}}{1 + \frac{y(s)}{s}} \right)^2 \text{ care este}$$

o ecuație omogenă. Efectuăm schimbarea de funcție $y(s) = su(s)$ și obținem ecuația

$$u(s) + su'(s) = 2 \left(\frac{u(s)}{1 + u(s)} \right)^2 \Leftrightarrow su'(s) = su'(s) = \frac{-u(s) - u^3(s)}{(1 + u(s))^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1 + u(s))^2}{u(s) + u^3(s)} u'(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u(s)} + \frac{2}{u^2(s) + 1} \right) u'(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{u(s)} + \frac{2}{u^2(s) + 1} \right) u'(s) ds = \int \frac{1}{s} ds \Leftrightarrow$$

$$\ln u(s) + 2 \operatorname{arctg} u(s) = \ln s + \ln C \Leftrightarrow \frac{u(s)}{s} = C e^{-2 \operatorname{arctg} u(s)}$$

$$\text{Dar } u(s) = \frac{y(s)}{s} = \frac{x(t) + 1}{t - 3} \Rightarrow \frac{x(t) + 1}{(t - 3)^2} = C e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{x(t) + 1}{t - 3}}. \blacktriangle$$

Exercițiul 1.5 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'(t) = \frac{t - x(t) + 1}{t - x(t) + 2}, t - x(t) + 2 \neq 0.$$

Rezolvare. Considerăm sistemul algebric $\begin{cases} t - x + 1 = 0 \\ t - x + 2 = 0 \end{cases}$. Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

0 și $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$ sistemul algebric (1.8) este incompatibil. Prin schimbarea de funcție $y(t) = -x(t) + t$ se obține ecuația cu variabile separabile

$$\frac{-y'(t) + 1}{1} = \frac{y(t) + 1}{y(t) + 2} \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{y(t) + 2} \Leftrightarrow$$

$$(y(t) + 2)y'(t) = 1 \Leftrightarrow \int (y(t) + 2)y'(t) dt = \int 1 dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} y^2(t) + 2y(t) = t + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} (-x(t) + t)^2 + 2(-x(t) + t) = t + C. \blacktriangle$$

Exercițiul 1.6 Să se determine soluția generală a ecuației

$$2t^4 x'(t)x(t) + x^4(t) = 4t^6.$$

Rezolvare. Facem schimbarea de funcție $x(t) = y^m(t)$, $m \in \mathbb{R}$, $y(t) > 0 \Rightarrow x(t) > 0$,
 $x'(t) = my^{m-1}(t)y'(t)$

$$2t^4my^{m-1}(t)y'(t)y^m(t) + y^{4m}(t) = 4t^6 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$3t^4y^2(t)y'(t) + y^6(t) = 4t^6 \Rightarrow y'(t) = \frac{4t^6 - y^6(t)}{3t^4y^2(t)}$$

care este o ecuație diferențială omogenă. Facem schimbarea de funcție $y(t) = tz(t)$.

$$z(t) + tz'(t) = \frac{4 - z^6(t)}{3z^2(t)} \Rightarrow tz'(t) = \frac{4 - z^6(t) - 3z^3(t)}{3z^2(t)} \Rightarrow$$

$$\frac{3z^2(t)}{-z^6(t) - 3z^3(t) + 4}z'(t) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \int \frac{3z^2(t)}{-z^6(t) - 3z^3(t) + 4}z'(t)dt = \int \frac{1}{t}dt$$

Pentru a calcula prima integrală facem schimbarea de variabilă $w(t) = z^3(t)$

$$\int \frac{3z^2(t)}{-z^6(t) - 3z^3(t) + 4}z'(t)dt = - \int \frac{w'(t)}{w^2(t) + 3w(t) - 4}dw = -\frac{1}{5} \ln \frac{w(t) - 1}{w(t) + 4}$$

Rezultă

$$\frac{1}{5} \ln \frac{z^3(t) - 1}{z^3(t) + 4} = -\ln |t| + \ln C \Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{z^3(t) - 1}{z^3(t) + 4}} = Ct \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^3 - 1}{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^3 + 4}} = \frac{C}{t}$$

Dar $y(t) = x^{\frac{2}{3}}(t)$ de unde rezultă

$$\frac{\left(\frac{x^2(t)}{t^3}\right) - 1}{\left(\frac{x^2(t)}{t^3}\right) + 4} = \left(\frac{C}{t}\right)^5 \Leftrightarrow \frac{x^2(t) - t^3}{x^2(t) + 4t^3} = \left(\frac{C}{t}\right)^5 \cdot \blacktriangle$$

1.3 Ecuații cu diferențiale exacte

Forma generală. Fie \mathcal{D} o mulțime nevidă și deschisă din \mathbb{R}^2 și $P, Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathcal{D} , cu $Q(t, x) \neq 0$ pe \mathcal{D} . O ecuație de forma

$$P(t, x(t))dt + Q(t, x(t))dx(t) = 0 \tag{1.9}$$

se numește **ecuație cu diferențială exactă** dacă

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{1.10}$$

Atunci există o funcție de clasă \mathcal{C}^2 , $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = P(t, x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = Q(t, x) \end{cases} \tag{1.11}$$

Rezolvarea ecuației cu diferențială exactă. Dacă (1.9) este o ecuație cu diferențială exactă, atunci x este soluție a ecuației dacă și numai dacă

$P(t, x(t))dt + Q(t, x(t))dx(t) = 0, \forall t \in \text{Dom}(x)$, egalitate care împreună cu faptul că F satisface (1.11) este echivalentă cu $dF(t, x(t)) = 0, \forall t \in \text{Dom}(x)$, echivalentă cu $F(t, x(t)) = C$.

Determinarea lui F se face astfel: considerăm sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = P(t, x) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = Q(t, x) \end{cases} \quad (1.12)$$

Exercițiul 1.7 Să se determine soluția generală a ecuației

$$(e^t + x(t) + \sin x(t))dt + (e^t + t + t \cos x(t))dx(t) = 0, e^x + t + t \cos x \neq 0.$$

Rezolvare. $P(t, x) = e^t + x + \sin x$, $Q(t, x) = e^x + t + t \cos x$, $\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = 1 + \cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = 1 + \cos x$, (1.10) este satisfăcută \Rightarrow este o ecuație cu diferențială exactă. Rezultă că există o funcție de clasă C^2 , F astfel încât $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = (e^t + x + \sin x)$ și $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = e^x + t + t \cos x$. Integrăm prima relație în raport cu t , $F(t, x) = \int (e^t + x + \sin x)dx = (e^t + xt + t \sin x) + h(x)$. Calculăm derivata în raport cu t , $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = (t + t \cos x) + h'(x)$. Egalăm expresiile derivatelor lui f în raport cu x și obținem $h'(x) = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + C_1 \Rightarrow F(t, x) = e^t + xt + t \sin x + e^x + C_1 \Rightarrow$

$$F(t, x(t)) = C_2 \Rightarrow e^t + x(t)t + t \sin x(t) + e^{x(t)} = C, C = C_2 - C_1. \blacktriangle$$

1.4 Ecuații cu factor integrant

Rezolvarea ecuației cu factor integrant. Dacă ecuația (1.9) nu este cu diferențială exactă, căutăm o funcție $\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, de clasă C^1 cu $\mu(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in \mathcal{D}$ astfel încât $\mu(t, x)P(t, x)dt + \mu(t, x)Q(t, x)dx$ să fie diferențiala unei funcții $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. O condiție necesară și suficientă pentru aceasta este 1.10, adică:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu(t, x)Q(t, x)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(t, x)P(t, x)),$$

care este echivalent cu

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x)Q(t, x) + \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x)\mu(t, x) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(t, x)P(t, x) - \frac{\partial P}{\partial x}(t, x)\mu(t, x) = 0$$

sau

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x)Q(t, x) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(t, x)P(t, x) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) \right) \mu(t, x) = 0, \forall (t, x) \in \mathcal{D}.$$

Aceasta este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cu μ ca funcție necunoscută. Vom studia două cazuri particulare de rezolvare a acestui tip de ecuații. Cazul general

va fi studiat la capitolul ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare omogene și cvasiliniare.

Observăm că dacă

$$\frac{1}{Q(t, x)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \right) = f(t)$$

este independentă de variabila x , putem căuta funcția μ ca funcție independentă de variabila x . Această funcție este soluție a ecuației liniare omogene

$$\mu'(t) = f(t)\mu(t).$$

Analog, dacă $P(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in \mathcal{D}$ și

$$\frac{1}{P(t, x)} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) \right) = k(x)$$

este independentă de variabila t , putem căuta funcția μ ca funcție independentă de variabila t . Această funcție este soluție a ecuației liniare omogene

$$\mu'(x) = k(x)\mu(x).$$

Exercițiul 1.8 Să se determine soluția generală a ecuației

$$(x(t) + \ln t) dt - t dx(t) = 0, t > 0.$$

Rezolvare. $P(t, x) = x + \ln t, Q(t, x) = -t, \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = 1, \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = -1, \frac{1}{Q(t, x)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \right) = \frac{2}{-t} = f(t) \Rightarrow \mu'(t) = \frac{2}{-t}\mu(t) \Rightarrow \ln \mu(t) = -2 \ln t \Rightarrow \mu(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{1}{t^2} (x(t) + \ln t) dt - \frac{1}{t} dx(t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{t^2} (x + \ln t), \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -\frac{1}{t}$. Dintre aceste două relații se integrează cea a cărei integrală se poate calcula mai ușor, de exemplu integrăm a doua relație $\Rightarrow F(t, x) = -\frac{x}{t} + u(t), \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{x}{t^2} + u'(t) \Rightarrow u'(t) = \frac{\ln t}{t^2} \Rightarrow u(t) = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + C_1 \Rightarrow \frac{x(t)}{t} + \frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t} = C \Rightarrow x(t, C) = Ct - \ln t - 1. \blacktriangle$

1.5 Ecuația diferențială de ordin întâi liniară

Forma generală. O ecuație diferențială de ordin întâi liniară este o ecuație de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{1.13}$$

unde $a, b : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe \mathbb{I} . Dacă $b \equiv 0$ pe \mathbb{I} ecuația se numește liniară și omogenă, iar în caz contrar liniară și neomogenă.

Teorema 1.1 Soluția generală a ecuației (1.13) în condițiile $a, b : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe \mathbb{I} , este de forma:

$$x(t, C) = e^{\int a(t) dt} \left(C + \int b(t) e^{-\int a(t) dt} dt \right) \tag{1.14}$$

Demonstrație.

Prezentăm două metode de rezolvare a acestei ecuații diferențiale.

Prima metodă este **metoda variației constantelor a lui Lagrange**.

Soluția generală a ecuației (1.13) se scrie ca sumă dintre soluția generală a ecuației omogene, $x_o(t, C)$ și o soluție particulară a ecuației neomogene, $x_p(t)$, deci $x(t, C) = x_o(t, C) + x_p(t)$.

Etapa I. Determinăm soluția generală a ecuației omogene. Fie ecuația omogenă $x'(t) = a(t)x(t)$ care este o ecuație cu variabile separabile. Soluția ei este $x_o(t, C) = Ce^{\int a(t)dt}$, $C \in \mathbb{R}$.

Etapa II. Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma soluției ecuației omogene, presupunând constanta ca funcție necunoscută, $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ unde u este o funcție derivabilă. Funcția necunoscută se determină impunând condiția ca funcția

$x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ să verifice ecuația neomogenă. Rezultă că $u'(t) = e^{-\int a(t)dt} b(t) \Rightarrow u(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt$ (nu am menționat constanta deoarece căutăm o soluție particulară

a ecuației neomogene). Deci $x_p(t) = e^{\int a(t)dt} \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt$.

$x(t, C) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt \right)$ este soluția generală a ecuației (1.13).

A doua metodă utilizează **factorul integrant**. În ecuația (1.13) putem considera $P(t, x) = a(t)x + b(t)$ și $Q(t, x) = -1 \Rightarrow \frac{1}{Q(t, x)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \right) = \frac{a(t)}{-1}$, $\mu'(t) =$

$-a(t)\mu(t) \Rightarrow \mu(t, x) = e^{-\int a(t)dt}$ și obținem:

$$x'(t)e^{-\int a(t)dt} = a(t)x(t)e^{-\int a(t)dt} + b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(x(t)e^{-\int a(t)dt} \right) = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$$

$$x(t)e^{-\int a(t)dt} = \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt + C \Leftrightarrow$$

$$x(t, C) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt \right) \blacklozenge$$

Exercițiul 1.9 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'(t) + \frac{t}{1-t^2}x(t) = t + \arcsin t, t \in [-1, 1].$$

Rezolvare. Metoda variației constantelor. Determinăm soluția generală a ecuației omogene

$$x'(t) + \frac{t}{1-t^2}x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{t}{1-t^2} \Leftrightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = -\int \frac{t}{1-t^2} dt \Leftrightarrow$$

$$\ln x(t) = \frac{1}{2} \ln(1-t^2) + \ln C \Leftrightarrow x_0(t) = C\sqrt{1-t^2}.$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma $x_p(t) = u(t)\sqrt{1-t^2}$. Impunem condiția să verifice ecuația neomogenă.

$$u'(t)\sqrt{1-t^2} - u(t)\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{1-t^2}u(t)\sqrt{1-t^2} = t + \arcsin t \Leftrightarrow$$

$$u'(t)\sqrt{1-t^2} = t + \arcsin t \Leftrightarrow u'(t) = \frac{t + \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow \int u'(t) dt = \int \frac{t + \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \Leftrightarrow$$

$$u(t) = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 t.$$

Rezultă că $x_p(t) = \left(-\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 t\right) \sqrt{1-t^2}$, iar soluția generală este

$$x(t, C) = x_0(t) + x_p(t) = C\sqrt{1-t^2} - (1-t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2} \arcsin^2 t.$$

Utilizând a doua metodă, înmulțim ecuația diferențială cu $e^{\int \frac{t}{1-t^2} dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ și obținem

$$x'(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{1-t^2}x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) = t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \Leftrightarrow$$

$$x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \int \left(t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \right) dt \Leftrightarrow$$

$$x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 t + C \Leftrightarrow$$

$$x(t, C) = C\sqrt{1-t^2} - (1-t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2} \arcsin^2 t. \blacktriangle$$

1.6 Ecuația Bernoulli

Forma generală. O ecuație de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^\alpha(t), \quad (1.15)$$

unde $a, b : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe \mathbb{I} , neidentic nule pe \mathbb{I} și neproportionale pe \mathbb{I} , iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, poartă denumirea de **ecuație Bernoulli**.

Teorema 1.2 Dacă $a, b : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe \mathbb{I} neidentice nule și neproporționale pe \mathbb{I} , iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ atunci x este soluție pozitivă a ecuației (1.15) dacă și numai dacă funcția y definită prin

$$y(t) = x^{1-\alpha}(t) \quad (1.16)$$

este pentru orice $t \in \mathbb{I}$ este o soluție pozitivă a ecuației liniare și neomogene

$$y'(t) = (1 - \alpha)a(t)y(t) + (1 - \alpha)b(t). \quad (1.17)$$

Demonstrație.

Dacă x este o soluție pozitivă a ecuației (1.15), împărțim această ecuație prin x^α și obținem:

$$x'(t)x^{-\alpha}(t) = a(t)x^{1-\alpha}(t) + b(t), \quad (1.18)$$

și prin schimbarea de variabilă (1.16) obținem

$$\frac{y'(t)}{1 - \alpha} = a(t)y(t) + b(t) \Leftrightarrow y'(t) = (1 - \alpha)a(t)y(t) + (1 - \alpha)b(t)$$

care este o ecuație diferențială de ordin întâi liniară neomogenă. ♦

Exercițiul 1.10 Să se determine soluția generală a ecuației

$$tx'(t) + x(t) = x^2(t) \ln t, t > 0, x(t) > 0.$$

Rezolvare. Împărțim ecuația prin $x^2(t)$ și obținem $x'(t)x^{-2}(t) + t^{-1}x^{-1}(t) = t^{-1} \ln t$, notăm

$y(t) = x^{-1}(t)$ și obținem $y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) + \frac{1}{t} \ln t$ care este o ecuație liniară. Soluția este $y(t) = \frac{1}{t}(t \ln t - t + C) \Rightarrow x^{-1}(t, C) = \frac{1}{t}(t \ln t - t + C)$. ▲

1.7 Ecuația Riccati

Forma generală. O ecuație de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t), \quad (1.19)$$

unde $a, b, c : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue cu b și c neidentice nule pe \mathbb{I} poartă denumirea de **ecuație Riccati**.

Teorema 1.3 Fie $a, b, c : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue cu b și c neidentice nule pe \mathbb{I} . Dacă $x_1 : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației (1.19), atunci soluția generală a ecuației (1.19) pe \mathbb{J} este dată de

$$x(t, C) = y(t, C) + x_1(t)$$

unde y este soluția generală a ecuației Bernoulli

$$y'(t) = (a(t) + 2x_1(t))y(t) + b(t)y^2(t).$$

Demonstrație.

Prin calcul direct obținem $x(t) = y(t) + x_1(t) \Rightarrow y'(t) = y'(t) + x_1'(t) \Rightarrow y'(t) + x_1'(t) = a(t)(y(t) + x_1(t)) + b(t)(y^2(t) + 2y(t)x_1(t) + x_1^2(t)) + c(t) \Rightarrow y'(t) = (a(t) + 2x_1(t))y(t) + b(t)y^2(t)$ care este o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$. ♦

Exercițiul 1.11 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'(t) = x^2(t) - \frac{2}{t^2}, t > 0.$$

Rezolvare. Observăm că $x_1(t) = \frac{1}{t}$ este o soluție particulară a ecuației date. Fie $x(t) = y(t) + \frac{1}{t} \Rightarrow x'(t) = y'(t) - \frac{1}{t^2} \Rightarrow y'(t) - \frac{1}{t^2} = y^2(t) + 2y(t)\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2} \Rightarrow y'(t) = 2y(t)\frac{1}{t} + y^2(t) \Rightarrow y'(t)y^{-2}(t) = 2y^{-1}(t)\frac{1}{t} + 1, u(t) = y^{-1}(t), u'(t) = -y'(t)y^{-2}(t) \Rightarrow -u'(t) = 2u(t)\frac{1}{t} + 1 \Rightarrow u'(t) = -2u(t)\frac{1}{t} - 1$. Înmulțim ecuația cu $e^{2 \ln t} = t^2 \Rightarrow u'(t)t^2 + 2u(t)t = -t^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(u(t)t^2) = -t^2 \Rightarrow u(t)t^2 = -\frac{t^3}{3} + C \Rightarrow u(t, C) = -\frac{t}{3} + Ct^{-2} \Rightarrow y(t, C) = \frac{3}{3Ct^{-2} - t} \Rightarrow x(t, C) = \frac{3}{3Ct^{-2} - t} + \frac{1}{t}$. ▲

1.8 Ecuația Lagrange

Forma generală. O ecuație diferențială de forma

$$x(t) = t\varphi(x'(t)) + \psi(x'(t)) \quad (1.20)$$

în care $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funcții de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathbb{R} , $\varphi(r) \neq r, \forall r \in \mathbb{R}$, se numește **ecuație Lagrange**. (este o formă nenormală).

Acest tip de ecuație se poate integra folosind **metoda parametrului**. Ea constă în determinarea soluțiilor de clasă \mathcal{C}^2 nu sub formă explicită $x = x(t)$ ci sub formă parametrică

$$\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p) \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

Rezolvarea ecuației Lagrange. Fie x o soluție de clasă \mathcal{C}^2 a ecuației Lagrange. Derivăm ecuația (1.20) membru cu membru și obținem:

$$x'(t) = \varphi(x'(t)) + t\varphi'(x'(t))x''(t) + \psi'(x'(t))x''(t).$$

Notând $x'(t) = p(t)$ avem $x''(t) = p'(t)$ și rezultă

$$p(t) = \varphi(p(t)) + t\varphi'(p(t))p'(t) + \psi'(p(t))p'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\varphi(p(t)) - p(t)}{t\varphi'(p(t)) + \psi'(p(t))}. \quad (1.21)$$

Presupunând că p este inversabilă și notând inversa ei cu $t = t(p)$, ecuația (1.21) se mai scrie sub forma

$$\frac{dt}{dp}(p) = -\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}t(p) - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \quad (1.22)$$

Ecuția (1.22) este o ecuație diferențială de ordin întâi liniară și poate fi integrată prin una din metodele prezentate în Teorema 1.1. Vom găsi $t = \theta(p, C)$, $p \in \mathbb{R}$ și C o constantă reală. Folosim ecuația (1.20) deducem:

$$\begin{cases} t = \theta(p, C) \\ x = \theta(p, C)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}, p \in \mathbb{R}. \quad (1.23)$$

Observația 1.1 În cazul în care în (1.23) putem elimina parametrul p , obținem soluția generală sub formă implicită sau chiar sub formă explicită.

Exercițiul 1.12 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x(t) = \frac{1}{2}tx'(t) + (x'(t))^2.$$

Rezolvare. Derivăm ecuația Lagrange în raport cu t și obținem notând $x'(t) = p(t)$:

$$x'(t) = \frac{1}{2}x'(t) + \frac{1}{2}tx''(t) + 2x'(t)x''(t) \Leftrightarrow$$

$$p(t) = \frac{1}{2}p(t) + \frac{1}{2}tp'(t) + 2p(t)p'(t).$$

Facem schimbarea de funcție $p(t) \longleftrightarrow t(p)$ și obținem

$$t'(p) = \frac{1}{p}t(p) + 4p \Big| \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dp} \Big| \left(t(p) \frac{1}{p} \right) = 4 \Rightarrow t(p) \frac{1}{p} = 4p + C \Rightarrow t(p) = 4p^2 + Cp \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t(p) = 4p^2 + Cp \\ x(p) = \frac{1}{2}(4p^2 + Cp)p + p^2 \end{cases}.$$

Observăm că ecuația admite și soluția $x(t) = 0$. ▲

1.9 Ecuația Clairaut

Forma generală. O ecuație diferențială de forma

$$x(t) = tx'(t) + \psi(x'(t)) \quad (1.24)$$

în care $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funcție de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathbb{R} se numește **ecuație Clairaut**.

Ecuația Clairaut se rezolvă tot prin metoda parametrului.

Rezolvarea ecuației Clairaut. Fie x o soluție de clasă \mathcal{C}^2 pe \mathbb{R} a ecuației (1.24). Derivând ecuația (1.24) obținem:

$$x'(t) = x'(t) + tx''(t) + \psi'(x'(t))x''(t) \Leftrightarrow x''(t)(t + \psi'(x'(t))) = 0.$$

Notând $p(t) = x'(t)$, ecuația de mai sus este echivalentă cu

$$p'(t)(t + \psi'(p(t))) = 0.$$

Dacă $p'(t) = 0$ rezultă $x'(t) = c$ cu $c \in \mathbb{R}$, și înlocuind în ecuația (1.24) obținem

$$x(t) = ct + \psi(t) \quad (1.25)$$

numită **soluția generală a ecuației Clairaut** care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de drepte.

Dacă $t + \psi'(p(t)) = 0$ deducem

$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}, p \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

sistem care definește parametric o curbă plană numită **soluția singulară a ecuației Clairaut** și care nu este altceva decât înfășurătoarea familiei de drepte definite de (1.26) (înfășurătoarea unei familii de drepte este o curbă cu proprietatea că familia de drepte coincide cu familia tuturor tangentelor la curbă).♦

Exercițiul 1.13 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x(t) = tx'(t) - (x'(t))^2.$$

Rezolvare. Derivăm ecuația Clairaut în raport cu t și obținem notând $x'(t) = p(t)$:

$x'(t) = x'(t) + tx''(t) - 2x'(t)x''(t) \Leftrightarrow x''(t)(t - 2x'(t)) = 0 \Leftrightarrow p'(t)(t - 2p(t)) = 0 \Rightarrow p'(t) = 0 \Rightarrow x(t) = ct + d \Rightarrow ct + d = ct - c^2 \Rightarrow d = -c^2 \Rightarrow x(t) = ct - c^2$ care reprezintă soluția generală a ecuației.

$$t - 2p = 0 \Rightarrow t = 2p \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = 2p \\ x = p^2 \end{cases}$$

care reprezintă soluția singulară a ecuației Clairaut. Ecuația implicită a curbei este

$x(t) = \frac{t^2}{4}$. Aceasta reprezintă o parabolă. Tangentele la parabolă duse prin punctul (t_0, x_0)

de pe parabolă au ecuația $x + x_0 = \frac{tt_0}{2}$. Dar $x_0 = \frac{t_0^2}{4} \Rightarrow x = \frac{t_0}{2}t - \frac{t_0^2}{4}$ care reprezintă ecuația

$x(t) = ct - c^2$ cu $c = \frac{t_0}{2}$.▲

1.10 Ecuații diferențiale de ordin superior.

Vom prezenta câteva clase de ecuații diferențiale de ordin n care, deși nu pot fi rezolvate prin metode elementare, pot fi reduse la ecuații de ordin strict mai mic decât n .

I. Ecuații de forma

$$x^{(n)}(t) = f(t), n \geq 2,$$

unde $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Aceste ecuații pot fi integrate complet, soluția lor generală exprimându-se prin n integrări succesive. Obținem

$$x(t, c_1, c_2, \dots, c_n) = \int \left(\int \left(\dots \int f(t) dt \dots \right) dt \right) dt + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_{n-1} t + c_n,$$

$(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

Exemplul 1.1 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x^{(3)}(t) = \sin t.$$

$$\text{Rezolvare. } x''(t) = -\cos t + c_1 \Rightarrow x'(t) = -\sin t + c_1 t + c_2 \Rightarrow x(t) = \cos t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3 \Rightarrow$$

$$x(t, c_1, c_2, c_3) = \cos t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3. \blacktriangle$$

II. Fie ecuația de ordin n incompletă

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1.27)$$

unde $0 < k < n$ și $F : \text{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^{n-k+2} \rightarrow \mathbb{R}$. Substituția $y(t) = x^{(k)}(t)$ reduce această ecuație diferențială la una de ordinul $n - k$ cu funcția necunoscută y

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n-k)}) = 0. \quad (1.28)$$

Să presupunem că putem determina soluția generală a ecuației (1.28), $y = y(t, c_1, \dots, c_{n-k})$. În aceste condiții, soluția generală a ecuației (1.27), $x = x(t, c_1, \dots, c_n)$ se obține integrând de k ori identitatea $x^{(k)} = y$.

Exemplul 1.2 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x''' = -\frac{1}{t}x'' + 3t, t > 0.$$

Rezolvare. Substituția $x'' = y$ conduce la ecuația diferențială de ordin întâi liniară

$$y' = -\frac{1}{t}y + 3t$$

a cărei soluție generală se obține înmulțind ecuația cu $e^{\int \frac{dt}{t}} = t \Rightarrow y't = -y + 3t^2 \Rightarrow$

$$(yt)' = 3t^2 \Rightarrow yt = t^3 + c_1 \Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{c_1}{t} \Rightarrow x''(t) = t^2 + \frac{c_1}{t} \Rightarrow x'(t) = \frac{t^3}{3} + c_1 \ln t + c_2 \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{t^4}{12} + c_1(t \ln t - t) + c_2 t + c_3 \Rightarrow x(t, c_1, c_2, c_3) = \frac{t^4}{12} + c_1(t \ln t - t) + c_2 t + c_3. \blacktriangle$$

Capitolul 2

Ecuatii diferențiale liniare de ordin n

2.1 Forma generală

Definiția 2.1 O ecuație diferențială liniară de ordin n este o ecuație de forma:

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \quad (2.1)$$

unde a_1, a_2, \dots, a_n, f sunt funcții continue de la un interval nevid deschis \mathbb{I} în \mathbb{R} , iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este funcția necunoscută.

Dacă în ecuația diferențială (2.1) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ecuația se numește **liniară omogenă** de ordin n . În caz contrar ecuația diferențială (2.1) se numește **liniară neomogenă**.

Problema Cauchy pentru ecuația diferențială liniară de ordin n :

Să se determine funcția $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$, \mathbb{I} un interval nevid deschis în \mathbb{R} astfel încât

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = -a_1(t)x^{(n-1)}(t) - \dots - a_{n-1}(t)x'(t) - a_n(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_{00}, x'(t_0) = x_{10}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1,0} \end{cases}, \quad (2.2)$$

unde a_1, a_2, \dots, a_n, f sunt funcții continue pe \mathbb{I} , $t_0, x_{i0} \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$.

Existența și unicitatea soluției problemei Cauchy: reamintim că prin intermediul transformărilor

$$\begin{cases} (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ \mathbf{g}(t, y_1, \dots, y_n) = (y_2, \dots, y_n, f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)) \end{cases},$$

ecuația (2.2) poate fi rescrisă echivalent ca un sistem de n ecuații diferențiale de ordin întâi cu n funcții necunoscute:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases},$$

unde $f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = -a_1(t)y_n(t) - \dots - a_{n-1}(t)y_2(t) - a_n(t)y_1(t) + f(t)$.

Teorema 2.1 Fie $f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}$. Pentru orice $t_0 \in \mathbb{I}$, și orice $x_{i0} \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n-1}$ problema (2.2) admite soluție unică definită într-o vecinătate suficient de mică a lui t_0 .

2.2 Soluția generală a ecuației omogene

Considerăm aplicația:

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

definită de

$$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x, \forall x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}.$$

Observăm că ecuația liniară omogenă de ordin n se poate scrie de forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Definiția 2.2 Funcțiile $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ se numesc **liniar dependente** pe \mathbb{I} , dacă există $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, (c_1, \dots, c_n) \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$ astfel încât

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = \theta_{\mathbb{V}}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

În caz contrar funcțiile $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ se numesc **liniar independente** pe \mathbb{I} .

Propoziția 2.1 Dacă x_1, x_2, \dots, x_n sunt n soluții liniar independente ale problemei (2.4), atunci soluția generală a acestei probleme este de forma

$$x(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Definiția 2.3 Dacă funcțiile $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente, atunci ele poartă numele de **sistem fundamental de soluții** ale ecuației (2.4).

Observația 2.1 Determinarea soluției generale revine la determinarea unui sistem fundamental de soluții.

Definiția 2.4 Fie funcțiile $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. Se numește **wronskianul** acestor funcții determinantul:

$$W[t, x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.2 Funcțiile $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente dacă și numai dacă wronskianul lor este diferit de zero, $W[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Teorema 2.3 (Teorema lui Liouville) *Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ atunci*

$$W[t, x_1, x_2, \dots, x_n] = W[t_0, x_1, x_2, \dots, x_n] e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}, \forall t \in \mathbb{I}, \quad (2.6)$$

iar t_0 este un punct arbitrar, fixat din \mathbb{I} .

Propoziția 2.2 *Oricare ar fi n funcții din \mathbb{V} , wronskianul lor este sau identic nul sau diferit de zero în orice punct din \mathbb{I} .*

Exercițiul 2.1 *Să se determine soluția generală a ecuației*

$$t^2 x'' - 5tx' + 8x = 0, t \neq 0,$$

știind că admite ca soluții particulare $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^4$.

Rezolvare. Se verifică prin calcul direct că $x_1(t) = t^2$ și $x_2(t) = t^4$ sunt soluții ale ecuației date. Verificăm dacă sunt liniar independente.

$$W[t, x_1, x_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t^4 \\ 2t & 4t^3 \end{vmatrix} = 2t^5 \neq 0.$$

Deci pe orice interval închis din $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ soluția generală este de forma $x(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.▲

2.3 Soluția generală a ecuației neomogene

Considerăm ecuația diferențială liniară de ordin n neomogenă

$$\mathcal{L}(x) = f; x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

Teorema 2.4 *Dacă $x_o(t, c_1, \dots, c_n)$ este soluția generală a ecuației diferențiale liniare omogene de ordin n , (2.4), iar $x_p(t)$ este o soluție particulară a ecuației diferențiale liniare neomogene de ordin n , (2.7), atunci*

$$x(t, c_1, \dots, c_n) = x_o(t, c_1, \dots, c_n) + x_p(t)$$

este soluția generală a ecuației diferențiale (2.7).

Deci problema determinării soluției generale a unei ecuații diferențiale liniare neomogene de ordin n , în ipoteza că se cunoaște un sistem fundamental de soluții, revine la determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene. Metoda generală de aflare a soluției particulare a ecuației neomogene este cunoscută sub numele de **metoda variației constantelor a lui Lagrange**.

Teorema 2.5 Dacă $x_o(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$; $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ este soluția generală a ecuației omogene (2.4), atunci o soluție particulară x_p a ecuației neomogene (2.7) este de forma

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) x_i(t), t \in \mathbb{I}, \quad (2.8)$$

unde $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$ sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}. \quad (2.9)$$

Exercițiul 2.2 Să se determine soluția generală a ecuației

$$t^2 x'' - 5tx' + 8x = t, t \neq 0,$$

știind că admite ca soluții particulare $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = t^4$.

Rezolvare. Ecuația se scrie sub forma

$$x'' - \frac{5}{t}x' + \frac{8}{t^2}x = \frac{1}{t}. \quad (2.10)$$

Știm din Exercițiul (2.1) că soluția generală a ecuației omogene este $x_o(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma $x_p(t) = C_1(t)t^2 + C_2(t)t^4$. Calculăm derivatele lui x_p și impunem condițiile precizate în Teorema (2.5).

$$x_p'(t) = C_1'(t)t^2 + C_1(t)2t + C_2'(t)t^4 + C_2(t)4t^3 \Rightarrow C_1'(t)t^2 + C_2'(t)t^4 = 0$$

$$x_p''(t) = C_1'(t)2t + C_1(t)2 + C_2'(t)4t^3 + C_2(t)12t^2$$

Înlocuim în ecuația neomogenă (2.10) și obținem

$$C_1'(t)2t + C_1(t)2 + C_2'(t)4t^3 + C_2(t)12t^2 - 10C_1(t) - 20C_2(t)t^2 + 8C_1(t) + 8C_2(t)t^2 = \frac{1}{t}.$$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(t)t^2 + C_2'(t)t^4 = 0 \\ C_1'(t)2t + C_2'(t)4t^3 = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow C_1'(t) = \frac{-t^3}{2t^5} = -\frac{1}{2t^2}, C_2'(t) = \frac{t}{2t^5} = \frac{1}{2t^4}.$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2t}, C_2(t) = -\frac{1}{6t^3} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{2t}t^2 - \frac{1}{6t^3}t^4 \Rightarrow x_p(t) = \frac{t}{2} - \frac{t}{6} \Rightarrow x_p(t) = \frac{t}{3}.$$

Soluția generală

$$x(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4 + \frac{t}{3}. \blacktriangle$$

2.4 Ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

Definiția 2.5 O ecuație diferențială liniară de ordin n cu coeficienți constanți este o ecuație de forma:

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = f(t) \quad (2.11)$$

unde f este o funcție continuă de la un interval nevid \mathbb{I} din \mathbb{R} , a_1, \dots, a_n sunt numere reale, iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este funcția necunoscută.

Dacă în ecuația diferențială (2.11) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ecuația se numește **liniară omogenă** de ordin n cu coeficienți constanți. În caz contrar ecuația diferențială (2.11) se numește **liniară neomogenă**.

Definim funcția liniară

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_nx.$$

Ecuația diferențială liniară omogenă de ordin n cu coeficienți constanți poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

Ne propunem să determinăm efectiv soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare de ordin n cu coeficienți constanți. Pentru aceasta căutăm soluții ale ecuației (2.12) de forma $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Are loc relația

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}P(\lambda), t \in \mathbb{I}. \quad (2.13)$$

unde

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2.14)$$

Polinomul $P(\lambda)$ se numește **polinom caracteristic**, iar ecuația

$$P(\lambda) = 0 \quad (2.15)$$

se numește **ecuația caracteristică** atașată ecuației (2.12).

Teorema 2.6 Funcția $x(t) = e^{\lambda t}$ este soluție a ecuației (2.12) dacă și numai dacă este soluție a ecuației caracteristice (2.15).

Teorema 2.7 Dacă polinomul $P(\lambda)$ are n rădăcini (reale sau complexe) distincte, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, atunci sistemul de funcții $(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (2.12).

Teorema 2.8 Sistemul de funcții

$$(t^k e^{\lambda_j t} \mid 0 \leq k \leq n_j - 1, 1 \leq j \leq m) \quad (2.16)$$

este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (2.12).

Observația 2.2 Dacă $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ este rădăcină a ecuației (2.12) atunci deoarece $t^k e^{\lambda_j t} = t^k (e^{\alpha_j t} \cos \beta_j + i e^{\alpha_j t} \sin \beta_j) = t^k e^{\alpha_j t} \cos \beta_j + i t^k e^{\alpha_j t} \sin \beta_j$ rezultă că și $t^k e^{\alpha_j t} \cos \beta_j$ și $t^k e^{\alpha_j t} \sin \beta_j$ sunt soluții ale ecuației (2.12). Deci asociem valorilor proprii λ_j și $\bar{\lambda}_j$ de ordin de multiplicitate cu n_j următorul sistem de $2n_j$ funcții reale

$$(t^k e^{\alpha_j t} \cos \beta_j, t^k e^{\alpha_j t} \sin \beta_j \mid 0 \leq k \leq n_j). \quad (2.17)$$

Din independența liniară a sistemului (2.16) rezultă independența sistemului (2.17).

Exercițiul 2.3 Să se determine soluția generală a ecuației

$$\begin{cases} x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare. Căutăm soluții ale ecuației de forma $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculăm derivatele $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $x'''(t) = \lambda^3 e^{\lambda t}$ și le înlocuim în ecuație. Obținem ecuația caracteristică $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Observăm că rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și distincte, rezultă că sistemul de funcții ($x_1(t) = e^{-3t}$, $x_2(t) = e^t$, $x_3(t) = e^{-t}$) este un sistem fundamental de soluții $\Rightarrow x(t, c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$. Determinăm soluția particulară impunând condițiile inițiale:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 + c_3 \\ x'(0) = -3c_1 + c_2 - c_3 \\ x''(0) = 9c_1 + c_2 + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ 9c_1 + c_2 + c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \\ c_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x(t) = -\frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}. \blacktriangle$$

Exercițiul 2.4 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x^{(IV)} + 2x'' + x = 0.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -i, \lambda_{3,4} = i$. Observăm că rădăcinile ecuației caracteristice sunt complexe și multiple cu ordinul de multiplicitate 2.

Sistemul de funcții ($\sin t, \cos t, t \sin t, t \cos t$) este un sistem fundamental de soluții. Rezultă soluția generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 t \sin t + c_4 t \cos t$. \blacktriangle

Exercițiul 2.5 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x^{(V)} - x^{(IV)} - x' + x = 0.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -1, \lambda_{4,5} = 1$. Observăm că rădăcinile ecuației caracteristice sunt și reale și complexe, simple și multiple.

Sistemul de funcții $(\sin t, \cos t, e^{-t}, e^t, te^t)$ este un sistem fundamental de soluții. Rezultă soluția generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 e^{-t} + c_4 e^t + c_5 t e^t$. ▲

Considerăm cazul ecuației diferențiale liniare de ordin n neomogenă cu coeficienți constanți. Considerăm ecuația

$$\mathcal{L}(x) = f, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}). \quad (2.18)$$

Din Teorema 2.4 știm că soluția generală a ecuației neomogene este $x(t, c_1, \dots, c_n) = x_o(t, c_1, \dots, c_n) + x_p(t)$ unde $x_o(t, c_1, \dots, c_n)$ este soluția generală a ecuației diferențiale liniare omogene de ordin n , (2.4), iar $x_p(t)$ este o soluție particulară a ecuației diferențiale liniare neomogene de ordin n . În momentul de față știm să determinăm efectiv soluția generală $x_o(t, c_1, \dots, c_n)$ a ecuației omogene atașate, iar din Teorema 2.5, aplicând metoda variației constantelor lui Lagrange, putem determina $x_p(t)$. Astfel *problema determinării soluției generale a unei ecuații diferențiale liniare de ordin n neomogenă cu coeficienți constanți este complet rezolvată.*

Exercițiul 2.6 Să se determine soluția generală a ecuației

$$\begin{cases} x'' + x = \frac{1}{\cos t}, t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ x(0) = 1, x'(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene. Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1) \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$.

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene folosind metoda variației constantelor.

$$x_p(t) = u_1(t) \sin t + u_2(t) \cos t$$

$$x_p'(t) = u_1'(t) \sin t + u_1(t) \cos t + u_2'(t) \cos t - u_2(t) \sin t \Rightarrow u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 0$$

$$x_p''(t) = u_1'(t) \cos t - u_1(t) \sin t - u_2'(t) \sin t - u_2(t) \cos t \Rightarrow u_1'(t) \cos t - u_2'(t) \sin t = \frac{1}{\cos t}.$$

Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 0 \\ u_1'(t) \cos t - u_2'(t) \sin t = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{u_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ \frac{1}{\cos t} & -\sin t \end{vmatrix} = -1, \Delta_{u_2'} = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = \operatorname{tg} t \Rightarrow$$

$$u_1'(t) = 1 \Rightarrow u_1(t) = t; u_2'(t) = -\operatorname{tg} t \Rightarrow u_2(t) = \ln |\cos t|.$$

Soluția particulară a ecuației neomogene este $x_p(t) = t \sin t + \cos t \cdot \ln |\cos t|$. Soluția generală a ecuației neomogene este:

$$x(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \sin t + \cos t \cdot \ln |\cos t|. \quad \blacktriangle$$

În aplicațiile tehnice apar probleme care necesită determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți în care funcția f este un

cvasipolinom sau o sumă de cvasipolinoame. În aceste cazuri se poate determina direct o soluție particulară a ecuației neomogene folosind rezultatele ce urmează.

forma lui f	x_p	x_p
$f(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i$	$P(0) \neq 0$	$P(0) = 0,$... $P^{(s-1)}(0) = 0,$ $P^{(s)}(0) \neq 0$
	$x_p(t) = \sum_{i=0}^m \mu_i t^i$ (Exercițiul 2.7)	$x_p(t) = t^s \sum_{i=0}^m \mu_i t^i$ (Exercițiul 2.8)
$f(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^m b_i t^i$	dacă $P(\alpha) \neq 0$	dacă $\begin{cases} P(\alpha) = 0, \\ \dots \\ P^{(s-1)}(\alpha) = 0, \\ P^{(s)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$
	$x_p(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^m \mu_i t^i$ (Exercițiul 2.9)	$x_p(t) = t^s e^{\alpha t} \sum_{i=0}^m \mu_i t^i$ (Exercițiu 12.10)
$f(t) = P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t$	dacă $P(i\beta) \neq 0$ atunci	dacă $\begin{cases} P(i\beta) = 0, \\ \dots \\ P^{(s-1)}(i\beta) = 0, \\ P^{(s)}(i\beta) \neq 0 \end{cases}$
$\text{grad}P = n,$ $\text{grad}Q = m$	$x_p(t) =$ $= A(t) \cos \beta t + B(t) \sin \beta t$ (Exercițiul 2.11) unde $\text{grad}A =$ $= \text{grad}B = \max \{m, n\}$	$x_p(t) =$ $= t^s [A(t) \cos \beta t +$ $+ B(t) \sin \beta t]$ (Exercițiul 2.12) unde $\text{grad}A =$ $= \text{grad}B = \max \{m, n\}$
$f(t) =$ $= e^{\alpha t} [P(t) \cos \beta t +$ $+ Q(t) \sin \beta t]$	dacă $P(\alpha + i\beta) \neq 0$ atunci	dacă $\begin{cases} P(\alpha + i\beta) = 0, \\ \dots \\ P^{(s-1)}(\alpha + i\beta) = 0, \\ P^{(s)}(\alpha + i\beta) \neq 0 \end{cases}$
$\text{grad}P = n,$ $\text{grad}Q = m$	$x_p(t) =$ $e^{\alpha t} [A(t) \cos \beta t + B(t) \sin \beta t]$ (Exercițiul 2.13) unde $\text{grad}A =$ $= \text{grad}B = \max \{m, n\}$	$x_p(t) =$ $= t^s e^{\alpha t} [A(t) \cos \beta t +$ $+ B(t) \sin \beta t]$ (Exercițiul 2.14) unde $\text{grad}A =$ $= \text{grad}B = \max \{m, n\}$

Facem observația că P, Q, A, B sunt polinoame de grad care se specifică de fiecare dată.

Exercițiul 2.7 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' - x = t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci $x_p(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow x_p'(t) = 2at + b, x_p''(t) = 2a$. Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem:

$$2a - at^2 - bt - c = t^2 \Rightarrow a = -1, b = 0, c = -2 \Rightarrow x_p(t) = -t^2 - 2.$$

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t^2 - 2$. ▲

Exercițiul 2.8 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x^{(IV)} - 4x'' = 8t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t}$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = 0$ este rădăcină de ordin de multiplicitate doi a ecuației caracteristice, deci $x_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) \Rightarrow x_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, x_p''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c, x_p'''(t) = 24at + 6b, x_p^{(IV)}(t) = 24a$. Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem:

$$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = 0, c = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2 \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t} - t^2 \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2} \right)$. ▲

Exercițiul 2.9 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' - 3x' + 2x = 8t^2 e^{3t}.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci

$$x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$$

$$x_p'(t) = 3e^{3t}(at^2 + bt + c) + e^{3t}(2at + b),$$

$$x_p''(t) = 9e^{3t}(at^2 + bt + c) + 4e^{3t}(2at + b) + e^{3t}2a.$$

Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem:

$$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = 0, c = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2 \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - t^2 \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2} \right)$. ▲

Exercițiul 2.10 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ este rădăcină de ordin doi a ecuației caracteristice, deci

$$\begin{aligned} x_p(t) &= t^2 e^{3t} (at^2 + bt + c) \Rightarrow \\ x'_p(t) &= 3e^{3t} (at^4 + bt^3 + ct^2) + e^{3t} (4at^3 + 3bt^2 + 2ct), \\ x''_p(t) &= 9e^{3t} (at^4 + bt^3 + ct^2) + 6e^{3t} (4at^3 + 3bt^2 + 2ct) + e^{3t} (12at^2 + 6bt + 2c). \end{aligned}$$

Înlocuim în ecuația neomogenă, simplificăm prin e^{3t} și obținem: $9(at^4 + bt^3 + ct^2) + 6(4at^3 + 3bt^2 + 2ct) + (12at^2 + 6bt + 2c) - 18(at^4 + bt^3 + ct^2) - 6(4at^3 + 3bt^2 + 2ct) + 9(at^4 + bt^3 + ct^2) = 8t^2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}, b = 0, c = 0 \Rightarrow x_p(t) = -\frac{2}{3}t^4$.

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} - \frac{2}{3}t^4$. ▲

Exercițiul 2.11 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' - 6x' + 9x = 10 \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci $x_p(t) = a \sin t + b \cos t \Rightarrow x'_p(t) = a \cos t - b \sin t, x''_p(t) = -a \sin t - b \cos t$. Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem: $-a \sin t - b \cos t - 6(a \cos t - b \sin t) + 9(a \sin t + b \cos t) = 10 \sin t \Rightarrow \begin{cases} 8a + 6b = 10 \\ -6a + 8b = 0 \end{cases}$, cu soluția: $\{b = \frac{3}{5}, a = \frac{4}{5}\}$.

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{4}{5} \sin t + \frac{3}{5} \cos t$. ▲

Exercițiul 2.12 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' + x = 10 \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = i$ este rădăcină a ecuației caracteristice de ordin de multiplicitate $s = 1$, deci $x_p(t) = t(a \sin t + b \cos t) \Rightarrow x'_p(t) = (a \sin t + b \cos t) + t(a \cos t - b \sin t), x''_p(t) = 2(a \cos t - b \sin t) + t(-a \sin t - b \cos t)$. Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem: $2(a \cos t - b \sin t) + t(-a \sin t - b \cos t) + t(a \sin t + b \cos t) = 10 \sin t \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 10 \end{cases}$, cu soluția: $\{b = -\frac{1}{2}, a = 0\}$.

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} t \sin t$. ▲

Exercițiul 2.13 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' + x = 10e^t \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \cot s + c_2 \sin t$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = 1 + i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci $x_p(t) = e^t(a \sin t + b \cos t) \Rightarrow x'_p(t) = e^t(a \sin t + b \cos t) + e^t(a \cos t - b \sin t)$, $x''_p(t) = 2e^t(a \cos t - b \sin t) + e^t(-a \sin t - b \cos t)$. Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem: $2e^t(a \cos t - b \sin t) + e^t(-a \sin t - b \cos t) + e^t(a \sin t + b \cos t) = 10e^t \sin t \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 10 \end{cases}$, cu soluția: $\{b = -\frac{1}{5}, a = 0\}$.

Soluția generală a ecuației date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - e^t \frac{1}{5} \sin t$.▲

Exercițiul 2.14 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' - 2x' + 2x = 10e^t \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Observăm că $\lambda = 1 + i$ este rădăcină a ecuației caracteristice de ordin de multiplicitate $s = 1$, deci $x_p(t) = te^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) \Rightarrow$

$$x'_p(t) = e^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) + te^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) + te^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t)$$

$$x''_p(t) = 2e^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) + e^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$te^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) +$$

$$te^t((at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$e^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$te^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$te^t(a \cos t + a \cos t - (at + b) \sin t - m \sin t - m \sin t - (mt + n) \cos t)$$

Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem:

$$x'' - 2x' + 2x = 2e^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) +$$

$$e^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$te^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) +$$

$$te^t((at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$e^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$te^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t) +$$

$$te^t(a \cos t + a \cos t - (at + b) \sin t - m \sin t - m \sin t - (mt + n) \cos t)$$

$$-2(e^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) + te^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t) +$$

$$te^t(a \sin t + (at + b) \cos t + m \cos t - (mt + n) \sin t)) +$$

$$2(te^t((at + b) \sin t + (mt + n) \cos t)) =$$

$$2e^t a \sin t + 2e^t(\cos t)b - e^t(\sin t)at + 2e^t m \cos t - 2e^t(\sin t)n + 4e^t(\cos t)at - 4e^t(\sin t)mt$$

$$2e^t a \sin t + 2e^t(\cos t)b - e^t(\sin t)at + 2e^t m \cos t - 2e^t(\sin t)n + 4e^t(\cos t)at - 4e^t(\sin t)mt =$$

$$10te^t \sin t \Rightarrow b = \frac{5}{2}, m = -\frac{5}{2} \Rightarrow$$

Soluția generală a ecuației date este:

$$x(t) = \frac{5}{2}e^t t \cot s - \frac{5}{2}e^t (\sin t) t^2 + c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t.$$

Următorul exercițiu este o aplicație la principiul superpoziției.

Exercițiul 2.15 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' - 9x = e^{3t} \cos t + te^{-3t} + t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluția generală a ecuației omogene: ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene. Utilizând principiul superpoziției, notăm $f_1(t) = e^{3t} \cos t$, $f_2(t) = te^{-3t}$, $f_3(t) = t^2$ și determinăm soluții particulare ale ecuațiilor $x'' - 9x = f_i$, $i = 1, 2, 3$. Fie ele x_{p_i} . Atunci $x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3}$.

Considerăm pe rând ecuațiile: $x'' - 9x = e^{3t} \cos t$, $x'' - 9x = te^{-3t}$, $x'' - 9x = t^2$.

Fie ecuația $x'' - 9x = e^{3t} \cos t$. Atunci $x_{p_1}(t) = ae^{3t} \cos t + be^{3t} \sin t$. $x'_{p_1}(t) = 3ae^{3t} \cos t - ae^{3t} \sin t + 3be^{3t} \sin t + be^{3t} \cos t$, $x''_{p_1}(t) = 8ae^{3t} \cos t - 6ae^{3t} \sin t + 8be^{3t} \sin t + 6be^{3t} \cos t$.

Înlocuim în ecuația neomogenă și obținem:

$$\begin{aligned} & 8ae^{3t} \cos t - 6ae^{3t} \sin t + 8be^{3t} \sin t + 6be^{3t} \cos t - 9(ae^{3t} \cos t + be^{3t} \sin t) \\ &= -ae^{3t} \cos t - 6ae^{3t} \sin t - be^{3t} \sin t + 6be^{3t} \cos t \Rightarrow \\ & -ae^{3t} \cos t - 6ae^{3t} \sin t - be^{3t} \sin t + 6be^{3t} \cos t = e^{3t} \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -a + 6b = 1 \\ -6a - b = 0 \end{cases}, \Rightarrow \left\{ a = -\frac{1}{37}, b = \frac{6}{37} \right\} \Rightarrow x_{p_1}(t) = -\frac{1}{37}e^{3t} \cos t + \frac{6}{37}e^{3t} \sin t.$$

Considerăm ecuația $x'' - 9x = te^{-3t}$. Deoarece $\lambda = -3$ este rădăcină de ordin întâi a polinomului caracteristic, atunci $x_{p_2}(t) = t(ct + d)e^{-3t}$.

$$x'_{p_2}(t) = (2ct + d)e^{-3t} - 3(ct^2 + dt)e^{-3t}, x''_{p_2}(t) = 2ce^{-3t} - 3(2ct + d)e^{-3t} - 3(2ct + d)e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} & 2ce^{-3t} - 3(2ct + d)e^{-3t} - 3(2ct + d)e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t} - 9((ct^2 + dt)e^{-3t}) = te^{-3t} \\ & 2ce^{-3t} - 12e^{-3t}ct - 6e^{-3t}d = te^{-3t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -12c = 1 \\ 2c - 6d = 0 \end{cases}, \Rightarrow \left\{ d = -\frac{1}{36}, c = -\frac{1}{12} \right\} \Rightarrow x_{p_2}(t) = t\left(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36}\right)e^{-3t}.$$

Considerăm ecuația $x'' - 9x = t^2 \Rightarrow x_{p_3}(t) = mt^2 + nt + p$, $x'_{p_3}(t) = 2mt + n$, $x''_{p_3}(t) = 2m$
 $2m + 9(mt^2 + nt + p) = t^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 9m = 1 \\ 9n = 0 \\ 2m + 9p = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ n = 0, m = \frac{1}{9}, p = -\frac{2}{81} \right\} \Rightarrow$$

$$x_{p_3}(t) = \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}.$$

Soluția generală este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{37}e^{3t} \cos t + \frac{6}{37}e^{3t} \sin t + t\left(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36}\right)e^{-3t} + \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$. ▲

Etapale de rezolvare a unei ecuații diferențiale de ordin superior cu coeficienți constanți sunt:

- determinarea polinomului caracteristic,
- scrierea soluției generale a ecuației omogene ținând seama de natura rădăcinilor polinomului caracteristic,

- determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene fie cu metoda variației constantelor fie, dacă este posibil, utilizând forma particulară a termenului liber,
- sumarea celor două soluții.

2.5 Ecuația liniară de ordinul doi

În acest paragraf, vom expune câteva chestiuni care nu sunt neapărat specifice ecuației liniare de ordinul doi, dar care în acest cadru particular își dovedesc utilitatea într-un mod mai evident. Prima dintre ele este **reducerea ordinului ecuației cu o unitate, atunci când se cunoaște o soluție particulară care nu se anulează pe intervalul de definiție.**

Fie ecuația

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{I} \quad (2.19)$$

în care coeficienții p și q sunt funcții reale continue pe intervalul \mathbb{I} ; se presupune $q(t) \neq 0$. Fie $x = x_1(t)$ o soluție particulară care nu se anulează pe acest interval. Fără a micșora generalitatea se poate presupune $x_1(t) > 0$ pentru $t \in \mathbb{I}$. Pentru a rezolva problema se face schimbarea de funcție $z(t) = x_1(t)x(t)$ și se reduce ordinul ecuației cu o unitate, adică la o ecuație de ordin întâi care poate fi rezolvată.

Exercițiul 2.16 Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'' + \frac{1}{t^2}x' - \frac{1}{t^3}x = 0, \quad t > 0$$

care admite soluția particulară $x_1(t) = t$.

Rezolvare. Făcând substituția $x(t) = x_1(t)z(t) = tz(t)$, în care $z = z(t)$ va fi noua funcție necunoscută, găsim, după înlocuirea lui $x'(t) = z(t) + tz'(t)$ și a $x''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$. Înlocuim în ecuație și obținem:

$$2z'(t) + tz''(t) + \frac{1}{t^2}z(t) + \frac{1}{t^2}tz'(t) - \frac{1}{t^3}tz(t) = 0 \Leftrightarrow tz''(t) + (2 + \frac{1}{t})z'(t) = 0$$

Notam $z'(t) = u(t) \Rightarrow tu'(t) + (2 + \frac{1}{t})u(t) = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2t+1}{t^2}dt \Rightarrow \ln u = -2 \ln t + \frac{1}{t} + \ln c_1 \Rightarrow u(t)t^2 = c_1 e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow u(t) = \frac{c_1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow z'(t) = \frac{c_1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow z(t) = -e^{\frac{1}{t}} c_1 + c_2 \Rightarrow x(t) = -te^{\frac{1}{t}} c_1 + c_2 t$.

În continuare, vom arăta **cum poate fi simplificată integrarea ecuației liniare de ordinul doi, în ipoteza că se cunoaște o soluție, ce nu se anulează, a așa numitei ecuației adjuncte.**

Vom defini

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}(x) = x'' + px' + qx.$$

Vom face ipoteza suplimentară $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. Ne propunem să calculăm integrala

$$\int y(t)(\mathcal{L}x)(t) dt = \int y(t)[x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t)] dt$$

în care $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este o funcție fixată. Integrând prin părți, vom obține

$$\begin{aligned} \int y(t)(\mathcal{L}x)(t) dt &= y(t)x'(t) - (y'(t) - p(t)y(t))x(t) + \\ &+ \int x(t)[y''(t) - (p(t)y(t))' + q(t)y(t)] dt, \end{aligned} \quad (2.20)$$

iar dacă notăm cu \mathcal{L}^*y funcția dată de egalitatea

$$(\mathcal{L}^*y)(t) = y''(t) - (p(t)y(t))' + q(t)y(t)$$

am definit un operator

$$\mathcal{L}^* : \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}),$$

care se va numi **adjunctul** operatorului \mathcal{L} .

În acest caz rezolvarea problemei se face astfel:

- se calculează \mathcal{L}^*y .
- se calculează

$$\int (y\mathcal{L}x - x\mathcal{L}^*y) dt = yx' - (y' - py)x + c, \quad (2.21)$$

în care c este o constantă arbitrară. Să presupunem acum că $y_1(x) \not\equiv 0$ este o soluție particulară a ecuației adjuncte $\mathcal{L}^*y = 0$, atunci

$$\int y_1 \mathcal{L}x dt = y_1 x' - (y_1' - p y_1) x + c.$$

Deoarece căutăm o soluție a ecuației $\mathcal{L}x = 0$ rezultă că ecuația $\mathcal{L}x = 0$ este echivalentă cu

$$y_1 x' - (y_1' - p y_1) x = c_1 \quad (2.22)$$

în care c_1 este o constantă reală arbitrară. Ecuația (2.22) este liniară de ordinul întâi în necunoscuta x și poate fi scrisă în forma echivalentă

$$x' = \left(\frac{y_1'}{y_1} - p \right) x + \frac{c_1}{y_1} \quad (2.23)$$

care este o ecuație diferențială de ordinul întâi liniară.

- se rezolvă ecuația diferențială de ordinul întâi liniară 2.23 și vom obține soluția generală a ecuației $\mathcal{L}x = 0$ care va depinde de două constante c_1 și c_2 . Luând pe rând $c_2 = 1$ și $c_1 = 0$, apoi $c_2 = 0$ și $c_1 = 1$, se obțin două soluții liniar independente ale ecuației (2.19) și anume:

$$x_1(t) = y_1(t)e^{-\int p(t) dt} \neq 0$$

și respectiv

$$x_2(t) = \left[\int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{\int p(t) dt} dt \right] y_1(t) e^{-\int p(t) dt} = x_1(t) \left[\int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{\int p(t) dt} dt \right].$$

Calculăm wronskianul acestor două funcții $W[t, x_1, x_2] \neq 0$, deci x_1 și x_2 sunt liniar independente și putem scrie soluția generală. ♦

Exercițiul 2.17 Să se rezolve ecuația diferențială

$$x''(t) - 4tx'(t) + (4t^2 - 2)x(t) = 0$$

știind că o soluție particulară a ecuației adjuncte este $y_1(t) = e^{-t^2}$.

Rezolvare. Notăm $\mathcal{L}x = x''(t) - 4tx'(t) + (4t^2 - 2)x(t)$.

Calculăm \mathcal{L}^*y integrând prin părți: $\int y\mathcal{L}x dt = \int y(x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x) dt = yx' - \int y'x' dt - 4txy + \int (4ty)'x dt + \int (4t^2 - 2)x dt = yx' - y'x + \int y''x dt - 4txy + \int (4y + 4ty')x dt + \int (4t^2 - 2)yx dt = \int (y'' + 4ty' + (4t^2 + 2)y)x dt + yx' - (y' + 4ty)x$

Rezultă $\int y\mathcal{L}x dt = \int x\mathcal{L}^*y dt + yx' - (y' + 4ty)x$.

Facem în această relație $y = y_1$ și deoarece $\mathcal{L}^*y_1 = 0$ iar problema este de a determina acel x soluție a lui $\mathcal{L}x = 0$ rezulta $e^{-t^2}x' - (-2te^{-t^2} + 4te^{-t^2})x = c_1 \Rightarrow e^{-t^2}x' - 2te^{-t^2}x = c_1 \Rightarrow (e^{-t^2}x)' = c_1 \Rightarrow e^{-t^2}x = c_1t + c_2 \Rightarrow x(t, c_1, c_2) = e^{t^2}(c_1t + c_2)$. ▲

O altă chestiune foarte interesantă relativ la ecuația liniară de ordinul doi este așa numita **problemă cu "condiții bilocale"**, care se rezolvă cu ajutorul funcției lui Green. Considerăm din nou ecuația

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), t \in \mathbb{I} \quad (2.24)$$

în care coeficienții p, q și termenul liber f sunt funcții continue pe intervalul \mathbb{I} . Problema care se pune este de a determina soluțiile care satisfac două condiții

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha_1 x'(a) + \alpha_2 x(a) = 0 \\ (2) \quad & \beta_1 x'(b) + \beta_2 x(b) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

unde $a < b$ sunt două puncte din \mathbb{I} și unde am presupus

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0.$$

Considerăm ecuația omogenă atașată

$$\mathcal{L}x = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, t \in \mathbb{I} \quad (2.26)$$

și vom căuta pentru aceasta soluții care să satisfacă condițiile la limite (2.25).

Algoritmul de rezolvare a problemei bilocale.

Rezolvăm ecuația omogenă $\mathcal{L}x = 0$ cu condițiile (2.25).

Sunt posibile numai două cazuri și anume:

(a) ecuația $\mathcal{L}x = 0$ cu condițiile (2.25) admit numai soluția banală $x = 0$;

(b) ecuația $\mathcal{L}x = 0$ cu condițiile (2.25) admit și soluții nebanale.

Presupunem că suntem în cazul (a): ecuația $\mathcal{L}x = 0$ cu condițiile (2.25) admite numai soluția banală $x = 0$. Vom considera un sistem fundamental de soluții x_1, x_2 ale ecuației $\mathcal{L}x = 0$ și vom alege soluțiile astfel:

- x_1 să satisfacă condiția (2.25)-(1), iar x_2 să satisfacă condiția (2.25)- (2). Căutăm soluția problemei noastre cu metoda variației constantelor

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), t \in \mathbb{I}$$

și ajungem la relațiile

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

din care rezultă

$$c_1(t) = c_1^0 + \int_t^b \frac{x_2(s)}{W(s)} f(s) ds, \quad c_2(t) = c_2^0 + \int_a^t \frac{x_1(s)}{W(s)} f(s) ds$$

c_1^0 și c_2^0 fiind constante arbitrare, care urmează să fie determinate ulterior. Soluția generală a ecuației $\mathcal{L}x = f$ este

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1^0 x_1(t) + c_2^0 x_2(t) + \\ &+ \int_a^t \frac{x_2(t)x_1(s)}{W(s)} f(s) ds + \int_t^b \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)} f(s) ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

în care $W = W(t, x_1, x_2)$ este wronskianul soluțiilor x_1 și x_2 ale ecuației $\mathcal{L}x = 0$. Impunând funcției $x = x(t)$ să verifice ambele condiții (2.25), găsim că c_1^0 și c_2^0 se determină în mod unic și anume $c_1^0 = c_2^0 = 0$. Prin urmare, în cazul (a) avem soluție unică pentru ecuația (2.24), cu condițiile la limite (2.25), dată de formula (2.27) în care $c_1^0 = c_2^0 = 0$. Putem scrie

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds, t \in [a, b] \quad (2.28)$$

în care funcția continuă $G = G(t, s)$, numită funcția lui Green, are următoarea expresie

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_2(t)x_1(s)}{W(s)}, & s \leq t \\ \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & s \geq t \end{cases} \quad (2.29)$$

și este definită pentru $(t, s) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.

Presupunem că suntem în cazul (b): ecuația $\mathcal{L}x = 0$ cu condițiile (2.25) admite și soluții nebanale. Alegem soluțiile particulare ale ecuației $\mathcal{L}x = 0$ astfel:

$-x_1(t)$ să verifice ambele condiții (2.25) și lui $x_2(t)$ nu i se impun condiții la limită, astfel încât $x_1(t)$ și $x_2(t)$ să fie liniar independente. Evident, soluția generală a ecuației $\mathcal{L}x = f$ va fi dată tot de formula (2.27) și impunând lui x condiția să satisfacă (2.25)-(1), vom găsi din nou $c_2^0 = 0$. Impunând și condiția (2.25)-(2), obținem relația

$$\begin{aligned} & c_1^0(\beta_1 x_1'(b) + \beta_2 x_1(b)) + \\ & + (\beta_1 x_2'(b) + \beta_2 x_2(b)) \int_a^b \frac{x_1(s)}{W(s)} f(s) ds = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Deoarece paranteza care înmulțește pe c_1^0 este nulă, iar paranteza care înmulțește integrala este nenulă (spre deosebire de cazul (a)), rezultă că o condiție necesară și suficientă ca această relație să fie verificată este ca

$$\int_a^b \frac{x_1(s)}{W(s)} f(s) ds = 0. \quad (2.31)$$

Condiția precedentă, pe care trebuie să o satisfacă f pentru ca ecuația $\mathcal{L}x = f$ cu condițiile (2.25) să aibă soluție, nu depinde în nici un fel de soluția particulară x_2 a ecuației $\mathcal{L}x = 0$, dacă ne amintim că în expresia wronskianului intră numai coeficientul p al ecuației (2.26). Într-un anumit sens, putem spune că ea este o condiție de "ortogonalitate" între funcția f și soluțiile problemei (2.26)- (2.25). În ipoteza că are loc (2.31), dacă $G(t, s)$ este din nou funcția definită prin aceeași relație (2.29) ca și în cazul (a), putem spune că funcția

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds, t \in [a, b] \quad (2.32)$$

este o soluție particulară a ecuației $\mathcal{L}x = f$, satisfăcând ambele condiții (2.25). Dacă ținem seama că din relația (2.30) nu rezultă nici o restricție pentru c_1^0 , putem scrie mulțimea tuturor soluțiilor problemei (2.24)-(2.25) în forma

$$x(t) = c x_1(t) + \int_a^b G(t, s) f(s) ds, t \in [a, b] \quad (2.33)$$

în care c este o constantă arbitrară. Putem rezuma cele prezentate mai sus, enunțând

Observația 2.3 În cazul ecuației

$$x'' + Q(t)x = 0, t \in \mathbb{I}$$

wronskianul a două soluții oarecare este constant, deci condiția de ortogonalitate (2.31) se scrie în forma mai simplă

$$\int_a^b x_1(t) f(t) dt = 0$$

Exercițiul 2.18 Să considerăm problema

$$x'' + x = f(t), x(0) = 0, x(\pi) = 0. \quad (2.34)$$

Se vede că ecuația omogenă $x'' + x = 0$, cu aceleași condiții la limite, are soluția nebanală $x_1 = \sin t$. Condiția necesară și suficientă de compatibilitate este

$$\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$$

Dacă este îndeplinită, luăm $x_2 = \cos t$ și ținând seama de (2.27), în care punem $c_2^0 = 0$, găsim că soluțiile problemei (2.34) sunt date de formula

$$x(t) = c \sin t - \int_0^t (\cos t \sin s) f(s) ds - \int_t^\pi (\sin t \cos s) f(s) ds$$

în care c este o constantă arbitrară. Desigur, pentru $t \in [0, \pi]$, putem scrie

$$x(t) = c \sin t + \int_0^\pi G(t, s) f(s) ds$$

unde funcția G este definită prin

$$G(t, s) = \begin{cases} -\cos t \sin s, & s \leq t \\ -\sin t \cos s, & s \geq t \end{cases}.$$

Capitolul 3

Sisteme diferențiale liniare de ordinul întâi

3.1 Soluția generală a unui sistem diferențial liniar omogen

Considerăm sistemul diferențial omogen

$$\underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t), t \in \mathbb{I}. \quad (3.1)$$

Notăm cu \mathbb{V} mulțimea soluțiilor sistemului (3.1) definite pe \mathbb{I} ,
 $\mathbb{V} = \{ \underline{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n), \underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t) \}$.

Teorema 3.1 *Mulțimea soluțiilor sistemului (3.1) definite pe \mathbb{I} este spațiu liniar peste \mathbb{R} , adică $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spațiu liniar și $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.*

Observația 3.1 Din Teorema 3.1 rezultă că dacă $\underline{\mathbf{y}}^i(t), i = \overline{1, n}$ este o bază în \mathbb{V} , orice soluție $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se exprimă în mod unic ca o combinație liniară de elementele bazei, adică $\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ unic determinat, astfel încât

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = c_1 \underline{\mathbf{y}}^1(t) + c_2 \underline{\mathbf{y}}^2(t) + \dots + c_n \underline{\mathbf{y}}^n(t), \forall t \in \mathbb{I}. \quad (3.2)$$

O problemă importantă în studiul sistemului (3.1) este aceea de a determina cel puțin o bază în mulțimea soluțiilor sistemului. **În general nu se cunosc metode de determinare a unei astfel de baze cu excepția cazului în care matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este constantă.**

În continuare vom prezenta o metodă de verificare dacă n soluții ale sistemului (3.1) sunt liniar independente.

Definiția 3.1 Fie $\underline{y}^i = \begin{pmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \vdots \\ y_n^i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, n}$, n soluții ale sistemului liniar omogen (3.1).

Matricea

$$\underline{W}(t) = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^n \end{bmatrix}$$

se numește **matricea Wronski** a soluțiilor \underline{y}^i , $i = \overline{1, n}$, iar funcția scalară

$$W [t, \underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n] = \det \underline{W}(t),$$

se numește **wronskianul** soluțiilor precizate.

Definiția 3.2 Sistemul de funcții $\underline{y}^i \in \mathbb{V}$, $i = \overline{1, n}$ se numește **sistem fundamental de soluții** ale sistemului (3.1) dacă el constituie o bază în \mathbb{V} .

Definiția 3.3 Matricea asociată unui sistem fundamental de soluții ale sistemului (3.1) poartă numele de **matrice fundamentală** a sistemului (3.1).

Observația 3.2 Sistemul (3.1) are o infinitate de matrici fundamentale. Aceasta rezultă din observația că spațiul soluțiilor sistemului (3.1) are o infinitate de baze.

Dacă $\underline{W}(t)$ este o matrice fundamentală a sistemului (3.1) atunci soluția generală a sistemului (3.1) este dată de

$$\underline{y}(t, \underline{c}) = \underline{W}(t)\underline{c}, \quad (3.3)$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}$ și $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2 (Liouville). Wronskianul a n soluții particulare ale sistemului (3.1) satisface relația:

$$W [t, \underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n] = W [t_0, \underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n] e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \underline{A}(s) ds}, \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{I}. \quad (3.4)$$

Observația 3.3 Din Teorema 3.2 rezultă că dacă matricea \underline{A} este de ordin n , wronskianul a n soluții fundamentale ale sistemului liniar omogen este sau identic nul pe \mathbb{I} sau diferit de zero pe acest interval.

Teorema 3.3 Dacă matricea \underline{A} este de ordin n , atunci soluțiile $\underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n$ sunt liniar independente dacă și numai dacă $W [t, \underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n] \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Exercițiul 3.1 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} y_1' = \frac{4}{t}y_1 - \frac{4}{t^2}y_2 \\ y_2' = 2y_1 - \frac{1}{t}y_2 \end{cases}, t \in \mathbb{I} \subset (0, \infty).$$

Să se verifice că funcțiile $\underline{\mathbf{y}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{y}}^2 = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ formează un sistem fundamental de soluții al sistemului dat, să se scrie matricea fundamentală și să se scrie soluția generală.

Rezolvare. Verificăm că $\underline{\mathbf{y}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ este soluție. Înlocuim întâi în sistem $y_1 = 1, y_2 = t \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = \frac{4}{t} \cdot 1 - \frac{4}{t^2} \cdot t \\ 1 = 2 \cdot 1 - \frac{1}{t} \cdot t \end{cases}, \text{ deci sistemul este verificat. Analog procedăm pentru } \underline{\mathbf{y}}^2 = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Pentru a arăta că $\underline{\mathbf{y}}^1, \underline{\mathbf{y}}^2$ sunt soluții fundamentale ale sistemului dat calculăm wronskianul: $W[t, \underline{\mathbf{y}}^1, \underline{\mathbf{y}}^2] = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{vmatrix} = -t^3 \neq 0 \Rightarrow$ formează un sistem fundamental de soluții.

Matricea fundamentală: $\underline{W}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix}$.

Soluția generală:

$$\underline{\mathbf{y}}^1(t, c_1, c_2) = c_1 \underline{\mathbf{y}}^1(t) + c_2 \underline{\mathbf{y}}^2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

3.2 Soluția generală a unui sistem neomogen

Considerăm sistemul liniar neomogen (?). Vom prezenta o metodă de determinare a soluției generale a sistemului neomogen cu ajutorul soluției generale a sistemului liniar omogen atașat.

Teorema 3.4 Fie $\underline{W}(t)$ o matrice fundamentală a sistemului (3.1) și fie $\underline{\mathbf{z}}$ o soluție particulară a sistemului (?). O funcție $\underline{\mathbf{y}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o soluție generală a sistemului liniar (?) dacă și numai dacă $\underline{\mathbf{y}}$ este de forma

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = \underline{W}(t)\underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{z}}(t) \quad (3.5)$$

Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t_0) = \underline{\mathbf{y}}_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Teorema 3.5 Dacă \underline{W} este o matrice fundamentală a sistemului omogen (3.1), atunci soluția problemei Cauchy este dată de formula:

$$\underline{y}(t) = \underline{W}(t)\underline{W}^{-1}(t_0)\underline{y}_0 + \underline{W}(t) \int_{t_0}^t \underline{W}^{-1}(s)\underline{b}(s)ds, \forall t \in \mathbb{I} \quad (3.7)$$

3.3 Metoda matriceală

Deoarece matricea $e^{t\mathbf{A}}$ verifică sistemul (3.1) $\frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}, \forall t \in \mathbb{I}$.

și $\det e^{t\mathbf{A}} \neq 0$ rezultă că matricea $e^{t\mathbf{A}}$ este o matrice fundamentală, deci putem scrie $\underline{W}(t) = e^{t\mathbf{A}}$ și înlocuind în relația (3.7) obținem:

$$\underline{y}(t) = e^{t\mathbf{A}}e^{-t_0\mathbf{A}}\underline{y}_0 + e^{t\mathbf{A}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathbf{A}}\underline{b}(s)ds, \forall t \in \mathbb{I}$$

echivalentă cu

$$\underline{y}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\underline{y}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\underline{b}(s)ds, \forall t \in \mathbb{I}. \quad (3.8)$$

Dacă nu avem date condițiile inițiale, soluția generală este dată de relația

$$\underline{y}(t, \underline{c}) = e^{t\mathbf{A}}\underline{c} + e^{t\mathbf{A}} \int e^{-t\mathbf{A}}\underline{b}(t)dt, \forall t \in \mathbb{I}. \quad (3.9)$$

Prin analogie cu formele matricei exponențiale, reamintim că

I. dacă \mathbf{A} este matrice diagonală, $\mathbf{A} = \mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, e^{t\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

II. dacă \mathbf{A} este diagonalizabilă, $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, atunci

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}.$$

III. dacă \mathbf{A} este celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii λ

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$e^{t\mathbf{J}_n} = e^{\lambda t\mathbf{I}_n + t\mathbf{E}_n} = e^{t\lambda} \left[\mathbf{I} + \frac{t}{1!}\mathbf{E}_n + \frac{t^2}{2!}\mathbf{E}_n^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{E}_n^{n-1} \right] =$$

$$= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

IV. dacă

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{J}}_1 & & 0 \\ & \underline{\mathbf{J}}_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \underline{\mathbf{J}}_s \end{pmatrix}, e^{t\underline{\mathbf{J}}} = \begin{pmatrix} e^{t\underline{\mathbf{J}}_1} & & 0 \\ & e^{t\underline{\mathbf{J}}_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{t\underline{\mathbf{J}}_s} \end{pmatrix}$$

V. dacă $\underline{\mathbf{A}}$ admite formă Jordan, $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{P}}^{-1}\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{P}}$, atunci

$$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\mathbf{P}}e^{t\underline{\mathbf{J}}}\underline{\mathbf{P}}^{-1}.$$

Exercițiul 3.2 Să se determine soluția generală a sistemului diferențial

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_4 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_3 - 2y_4 \\ y_4' = y_1 - 2y_3 + 5y_4 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este diagonalizabilă, $\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, iar $\underline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\underline{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{17}{40} & 0 & \frac{3}{20} & -\frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & -\frac{1}{20} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}.$$

Deci

$$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\mathbf{P}}e^{t\underline{\mathbf{D}}}\underline{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{17}{40} & 0 & \frac{3}{20} & -\frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & -\frac{1}{20} & \frac{7}{40} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} + \frac{17}{20}e^t + \frac{1}{40}e^{6t} & 0 & -\frac{1}{4} + \frac{3}{10}e^t - \frac{1}{20}e^{6t} & -\frac{1}{8} - \frac{1}{20}e^t + \frac{7}{40}e^{6t} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} + \frac{17}{40}e^t - \frac{1}{20}e^{6t} & 0 & \frac{3}{4} + \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{10}e^{6t} & \frac{3}{8} - \frac{1}{40}e^t - \frac{7}{20}e^{6t} \\ -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{6t} & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{6t} & \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Deci soluția generală este

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} + \frac{17}{20}e^t + \frac{1}{40}e^{6t} & 0 & -\frac{1}{4} + \frac{3}{10}e^t - \frac{1}{20}e^{6t} & -\frac{1}{8} - \frac{1}{20}e^t + \frac{7}{40}e^{6t} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} + \frac{17}{40}e^t - \frac{1}{20}e^{6t} & 0 & \frac{3}{4} + \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{10}e^{6t} & \frac{3}{8} - \frac{1}{40}e^t - \frac{7}{20}e^{6t} \\ -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{6t} & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{6t} & \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8}c_1 + \frac{17}{20}c_1e^t + \frac{1}{40}c_1e^{6t} - \frac{1}{4}c_3 + \frac{3}{10}c_3e^t - \frac{1}{20}c_3e^{6t} - \frac{1}{8}c_4 - \frac{1}{20}c_4e^t + \frac{7}{40}c_4e^{6t} \\ e^tc_2 \\ -\frac{3}{8}c_1 + \frac{17}{40}c_1e^t - \frac{1}{20}c_1e^{6t} + \frac{3}{4}c_3 + \frac{3}{20}c_3e^t + \frac{1}{10}c_3e^{6t} + \frac{3}{8}c_4 - \frac{1}{40}c_4e^t - \frac{7}{20}c_4e^{6t} \\ -\frac{1}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_1e^{6t} + \frac{1}{4}c_3 - \frac{1}{4}c_3e^{6t} + \frac{1}{8}c_4 + \frac{7}{8}c_4e^{6t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{1}{8} + \frac{1}{40}e^{6t} + \frac{17}{20}e^t)c_1 + (-\frac{1}{4} + \frac{3}{10}e^t - \frac{1}{20}e^{6t})c_3 + (-\frac{1}{8} - \frac{1}{20}e^t + \frac{7}{40}e^{6t})c_4 \\ e^tc_2 \\ (-\frac{3}{8} + \frac{17}{40}e^t - \frac{1}{20}e^{6t})c_1 + (\frac{3}{4} + \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{10}e^{6t})c_3 + (\frac{3}{8} - \frac{1}{40}e^t - \frac{7}{20}e^{6t})c_4 \\ (-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{6t})c_1 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{6t})c_3 + (\frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{6t})c_4 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 3.3 Să se determine soluția generală a sistemului diferențial

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 4y_2 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matricea $\underline{\mathbf{A}}$ admite formă Jordan și obținem

$$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2te^{2t} + e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & 2te^{2t} + e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Deci soluția generală este

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2te^{2t} + e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & 2te^{2t} + e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1te^{2t} + c_1e^{2t} + te^{2t}c_2 \\ -4c_1te^{2t} + 2te^{2t}c_2 + c_2e^{2t} \\ -2c_1te^{2t} + te^{2t}c_2 + e^{2t}c_3 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 3.4 Să se determine soluția generală a sistemului diferențial

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 2e^{2t} \\ y_2' = y_1 + y_2 + 2y_3 - 2e^{2t} \\ y_3' = y_1 - y_2 + 4y_3 + 2te^{2t} \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ 2te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Calculăm matricea exponențială

$$\begin{aligned} e^{t\underline{A}} &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2 e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} & 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2 e^{2t} & -3te^{2t} + \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{2}t^2 e^{2t} & 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} + \frac{1}{2}t^2 e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folosim formula (3.9).

$$\begin{aligned} e^{-t\underline{A}} &= \begin{pmatrix} e^{-2t}(1+t) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) & \frac{1}{2}te^{-2t}(6+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t}(2+2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}te^{-2t}(2+t) & \frac{1}{2}e^{-2t}(2-4t-t^2) \end{pmatrix} \\ \underline{y}(t, \underline{c}) &= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \cdot \\ &\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \int \begin{pmatrix} e^{-2t}(1+t) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) & \frac{1}{2}te^{-2t}(6+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t}(2+2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}te^{-2t}(2+t) & \frac{1}{2}e^{-2t}(2-4t-t^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ 2te^{2t} \end{pmatrix} dt \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \cdot \\ &\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t+3t^2+\frac{7}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4 \\ -2t^2-2t-\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4 \\ -t^2-\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \cdot \\ &\begin{pmatrix} c_1+2t+3t^2+\frac{7}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4 \\ c_2-2t^2-2t-\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4 \\ c_3-t^2-\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4 Metoda valorilor și vectorilor proprii

Uneori aplicarea unei formulelor de mai sus pentru găsirea unei matrice fundamentale se poate dovedi un lucru dificil, care poate fi evitat, cel puțin în cazul când ordinul matricei

$\underline{\mathbf{A}}$ nu este prea mare.

Considerăm sistemul diferențial liniar de ordin întâi omogen de forma (3.1),

$$\underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t) \quad (3.10)$$

Vom căuta o soluție particulară pentru acest sistem de forma

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{u}}e^{\lambda t}, \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.11)$$

în care λ este o constantă ce trebuie aflată, iar $\underline{\mathbf{u}}$ este un vector constant de tipul $n \times 1$, dat prin

$${}^t \underline{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

Derivând și înlocuind în sistem, găsim condiția $(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}$, în care $\underline{\mathbf{I}}$ este matricea unitate de ordinul n , iar $\underline{\mathbf{0}}$ este vectorul nul de tipul $n \times 1$. Pentru a avea soluții $\underline{\mathbf{u}}$ nebanale, se impune ca $\det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) = 0$, adică λ trebuie să fie rădăcină a polinomului caracteristic $P(\lambda)$ al matricei $\underline{\mathbf{A}}$. Fie $\lambda = \lambda_1$ o rădăcină a acestui polinom și $\underline{\mathbf{u}}^1$ un vector propriu corespunzător, dat prin relația

$${}^t [\underline{\mathbf{u}}^1] = [u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1]$$

Atunci $\underline{\mathbf{u}}^1(t) = \underline{\mathbf{u}}^1 e^{\lambda_1 t}$ este o soluție a sistemului dat, iar în cazul că $P(\lambda)$ are rădăcini distincte sau matricea admite o bază formată din vectori proprii (**matrice diagonalizabilă**), se găsesc în acest fel n soluții particulare, care formează un sistem fundamental de soluții pentru sistemul 3.10. Matricea $\underline{\mathbf{W}}(t) = [\underline{\mathbf{u}}^1(t), \underline{\mathbf{u}}^2(t), \dots, \underline{\mathbf{u}}^n(t)]$ este o matrice fundamentală a aceluiași sistem. Ilustrăm cu un exercițiu cele prezentate.

Exercițiul 3.5 *Reluăm sistemul de la Exercițiul 3.2:*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_4 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_3 - 2y_4 \\ y_4' = y_1 - 2y_3 + 5y_4 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Conform rezultatelor de la Exercițiul 3.2 matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este diagonalizabilă,

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

iar matricea care conține vectorii proprii este matricea modală

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului este:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) &= c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \\ &= \begin{pmatrix} -c_1 + 2e^t c_3 + e^{6t} c_4 \\ e^t c_2 \\ 3c_1 + e^t c_3 - 2e^{6t} c_4 \\ c_1 + 5e^{6t} c_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercițiul 3.6 Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20$.

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0$, valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3 + i$, $\lambda_3 = 3 - i$.

$$\text{Pentru } \lambda_1 = 2 \Rightarrow \underline{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{y}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

$$\lambda_2 = 3 + i \Rightarrow \underline{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(3+i)t} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} (\cos t +$$

$i \sin t) =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix} e^{3t} + i \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Considerând

$$\underline{\mathbf{y}}_2(t) = \text{Re } \underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix} e^{3t}$$

și

$$\underline{\mathbf{y}}_3(t) = \text{Im } \underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix} e^{3t}, (\underline{\mathbf{y}}_1, \underline{\mathbf{y}}_2, \underline{\mathbf{y}}_3)$$

formează un sistem fundamental de soluții, deci soluția generală este

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix} e^{3t} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} c_1 + e^{3t} c_2 (2 \cos t - \sin t) + e^{3t} c_3 (\cos t + 2 \sin t) \\ e^{3t} c_2 (\cos t - 3 \sin t) + e^{3t} c_3 (3 \cos t + \sin t) \\ e^{2t} c_1 + 5 e^{3t} c_2 \cos t + 5 e^{3t} c_3 \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În alte situații, când **polinomul caracteristic are rădăcini multiple și matricea nu este diagonalizabilă**, se poate întâmpla să nu găsim un sistem fundamental de soluții de forma "vector constant înmulțit cu $e^{\lambda t}$ ". În aceste cazuri, pentru autovalorile multiple vom căuta soluții particulare de forma "vector-polinom înmulțit cu $e^{\lambda t}$ ". Să presupunem că pentru $\lambda = \lambda_1$ rădăcină cel puțin dublă pentru $P(\lambda) = \det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}})$ îi corespunde o serie formată dintr-un vector propriu $\underline{\mathbf{u}}$, $(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ și un asociat $\underline{\mathbf{u}}^1$. Stim o soluție $\underline{\mathbf{y}}^1 = \underline{\mathbf{u}}e^{\lambda_1 t}$. Căutăm două soluții de forma

$$\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{a}}t + \underline{\mathbf{b}})e^{\lambda_1 t}$$

în care $\underline{\mathbf{a}}$ și $\underline{\mathbf{b}}$ sunt vectori constanți de tipul $n \times 1$, găsim după derivare și înlocuire în $\underline{\mathbf{y}}' = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{y}}$, condițiile

$$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}.$$

Din prima condiție, se vede că putem lua $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{u}}$, vectorul propriu iar soluția sistemului $(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{u}}$, în care necunoscuta este $\underline{\mathbf{b}}$, este vectorul propriu asociat lui $\underline{\mathbf{u}}$, pe care l-am notat $\underline{\mathbf{u}}^1$. Putem afirma că

$$\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{u}}t + \underline{\mathbf{u}}^1)e^{\lambda_1 t}$$

este soluția căutată. Dacă $\lambda = \lambda_1$ este rădăcină cel puțin triplă pentru $P(\lambda)$ și îi corespunde o serie de lungime trei formată dintr-un vector propriu și doi asociați, $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}^1, \underline{\mathbf{u}}^2$. Stim două soluții, $\underline{\mathbf{y}}^1(t) = \underline{\mathbf{u}}e^{\lambda_1 t}$ și $\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{u}}t + \underline{\mathbf{u}}^1)e^{\lambda_1 t}$ vom căuta a treia soluție de forma

$$\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{a}}t^2 + \underline{\mathbf{b}}t + \underline{\mathbf{c}})e^{\lambda_1 t}$$

în care $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$ și $\underline{\mathbf{c}}$ sunt vectori constanți de tipul $n \times 1$. După derivare și înlocuire în sistem, găsim

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0} &\Rightarrow \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{u}} \\ (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{b}} = 2\underline{\mathbf{a}} &\Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\left(\frac{1}{2}\underline{\mathbf{b}}\right) = \underline{\mathbf{a}} \Rightarrow \frac{1}{2}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{u}}^1 \Rightarrow \underline{\mathbf{b}} = 2\underline{\mathbf{u}}^1, \\ (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{b}} &\Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1 \underline{\mathbf{I}})\left(\frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{b}} \Rightarrow \frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{u}}^2 \Rightarrow \underline{\mathbf{c}} = 2\underline{\mathbf{u}}^2 \end{aligned}$$

de unde rezulta că

$$\underline{\mathbf{y}} = (\underline{\mathbf{u}}t^2 + 2\underline{\mathbf{u}}^1t + 2\underline{\mathbf{u}}^2)e^{\lambda_1 t}$$

este soluția sistemului $\underline{\mathbf{y}}' = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{y}}$, căutată de noi. Vom ilustra metoda prezentată pe un exemplu concret.

Exercițiul 3.7 Reluăm sistemul de la Exercițiul 3.3

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 4y_2 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$

Baza Jordan este formată dintr-o serie de lungime doi și una de lungime unu

$$\underline{u}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Corespunzător seriei de lungime doi avem soluțiile

$$\underline{y}^1(t) = \underline{u}_1^1 e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

$$\underline{y}^2(t) = (\underline{u}_1^1 t + \underline{u}_2^1) e^{2t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t},$$

iar pentru seria de lungime unu avem soluția

$$\underline{y}^3(t) = \underline{u}_1^2 e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

deci

Soluția generală este

$$\underline{y}(t, \underline{c}) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} c_1 + c_2 e^{2t} (t + 1) + c_3 e^{2t} \\ 2e^{2t} c_1 + c_2 e^{2t} (2t + 2) + 2c_3 e^{2t} \\ e^{2t} c_1 + c_2 e^{2t} t \end{pmatrix}.$$

Vom prezenta o metodă mai mult formală pentru rezolvarea sistemelor diferențiale cu coeficienți constanți, omogene sau neomogene. Pentru a simplifica modul de rezolvare a acestor sisteme diferențiale introducem operatorul D ca o notație prescurtată pentru derivare

$$D^n x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^n x}{dx^n}.$$

La fel

$$\frac{1}{D^n} x \stackrel{\text{def}}{=} n \text{ integrale } \int \int \dots \int x(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

astfel încât

$$D^n \left\{ \frac{1}{D^n} x \right\} = x.$$

O ecuație diferențială de ordin n

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t)$$

poate fi scrisă cu ajutorul operatorului D de forma

$$(D^n x + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)x = f.$$

Operatorul D satisface regulile algebrei.

Analog un sistem diferențial de forma

$$\begin{cases} 3x' + x + y' + 2y = f_1 \\ x' + 4x + y'' + y' = f_2 \end{cases}$$

poate fi scris astfel

$$\begin{cases} (3D + 1)x + (D + 2)y = f_1 \\ (D + 4)x + (D^2 + D)y = f_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Ideea metodei consta în a elimina x și a obține o ecuație diferențială în y care poate fi rezolvată cu metodele cunoscute de la ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Pentru a elimina x înmulțim ecuația întâi din sistemul 3.12 cu $D^2 + D$ iar a doua ecuație din sistemul 3.12 cu $-(D + 2)$ și le adunăm. Obținem

$$(D^2 + D)(3D + 1)x - (D + 4)(D + 2)x = (D^2 + D)f_1 - (D + 2)f_2$$

$$3D^3x + 3D^2x - 5Dx - 8x = D^2f_1 + Df_1 - Df_2 - 2f_2$$

care se rezolvă ca o ecuație de ordin trei cu coeficienți constanți. În mod analog se obține o ecuație în y . Ca exemple de rezolvare prin această metodă prezentăm exercițiile de mai jos.

Exercițiul 3.8 Să se afle soluția generală a sistemului:

$$\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' - 2y = 2t - \cos 2t \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} (D - 1)x + 2y = 0 \\ D^2x - 2Dy = 2t - \cos 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D(D - 1)x + 2Dy = 0 \\ D^2x - 2Dy = 2t - \cos 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2D^2 - D)x = 2t - \cos 2t \Leftrightarrow$$

$$2x'' - x' = 2t - \cos 2t$$

$$x(t, C_1, C_2) = -t^2 + \frac{1}{34} \sin 2t - 4t - 8 + \frac{2}{17} \cos 2t + C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\text{Din a doua ecuație obținem } 2y = 2t - \frac{1}{17} \cos 2t + 4 - \frac{9}{34} \sin 2t - \frac{1}{2} C_2 e^{\frac{1}{2}t} + t^2 - C_1 \Rightarrow$$

$$y(t, C_1, C_2) = t - \frac{1}{34} \cos 2t + 2 - \frac{9}{68} \sin 2t - \frac{1}{4} C_2 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} C_1$$

Exercițiul 3.9 Să se afle, prin metoda eliminării, soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y'_3 = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Rezolvare.

Fixăm prima ecuație pe care o derivăm de două ori, iar ecuațiile doi și trei le derivăm o dată.

$$\begin{cases} (D-2)y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 + (-D+3)y_2 - y_3 = 0 \\ -y_1 + 2y_2 + (-D+3)y_3 = 0 \end{cases} .$$

Eliminăm y_2 din ecuațiile doi și trei

$$\begin{cases} -(D^2 - 5D + 5)y_1 - y_3 = 0 \\ (2D - 5)y_1 - (D - 3)y_3 = 0 \end{cases}$$

Eliminăm y_3 din ecuația a doua

$$(2D - 5)y_1 + (D - 3)(D^2 - 5D + 5)y_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(D^3 - 8D^2 + 22D - 20)y_1 = 0 \text{ sau}$$

$$y_1''' - 8y_1'' + 22y_1' - 20y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$y_1(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \cos t + C_3 e^{3t} \sin t$$

$$y_3(t, C_1, C_2, C_3) = -y_1'' + 5y_1' - 5y_1 = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t} \cos t + 2C_3 e^{3t} \sin t + C_2 e^{3t} \sin t - C_3 e^{3t} \cos t$$

$$y_2(t, C_1, C_2, C_3) = y_1' - 2y_1 = C_2 e^{3t} \cos t + C_3 e^{3t} \sin t - C_2 e^{3t} \sin t + C_3 e^{3t} \cos t$$